

# 1987 年全国硕士研究生入学统一考试

## 数学试题参考解答

### 数 学 ( 试 卷 I )

一、填空题 ( 每小题 3 分, 满分 15 分. 只写答案不写解题过程 )

(1) 与两直线  $\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases}$  及  $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$  都平行, 且过原点的平面方程是  $\underline{x-y+5=0}$

(2) 当  $x = -1/\ln 2$  时, 函数  $y = x^{2^x}$  取得极小值.

(3) 由  $y = \ln x$  与两直线  $y = (e+1) - x$  及  $y = 0$  围成图形的面积 =  $\underline{3/2}$

(4) 设  $L$  为取正向的圆周  $x^2 + y^2 = 9$ , 则曲线积分  $\oint_L (2xy - 2y)dx + (x^2 - 4x)dy$  的值是  $\underline{-18\pi}$ .

(5) 已知三维线性空间的一组基底  $\alpha_1 = (1, 1, 0)$ ,  $\alpha_2 = (1, 0, 1)$ ,  $\alpha_3 = (0, 1, 1)$ , 则向量  $\alpha = (2, 0, 0)$  在上述基底下的坐标是  $\underline{(1, 1, -1)}$

二、( 本题满分 8 分 )

求正的常数  $a$  与  $b$ , 使式  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}} dt = 1$  成立.

解: 假若  $b \neq 1$ , 则根据洛必达法则有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}} dt = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{b - \cos x} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}} \right) = 0 \neq 1, \text{ 与题设矛盾, 于是 } b = 1.$$

$$\text{此时 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}} dt = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1 - \cos x} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\frac{1}{2}x^2} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}} \right) = \frac{2}{\sqrt{a}},$$

即  $1 = \frac{2}{\sqrt{a}}$ , 因此  $a = 4$ .

三、( 本题满分 7 分 )

(1) 设函数  $f, g$  连续可微,  $u = f(x, xy), v = g(x + xy)$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ .

$$\text{解: } \frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + f'_2 \cdot \frac{\partial(xy)}{\partial x} = f'_1 + y \cdot f'_2; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = g' \cdot \frac{\partial(x+xy)}{\partial x} = (1+y) \cdot g'.$$

(2) 设矩阵  $A$  和  $B$  满足  $AB = A + 2B$ , 其中  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ , 求矩阵  $B$ .

解: 因  $AB = A + 2B$ , 故  $AB - 2B = A$ , 即  $(A - 2E)B = A$ ,

$$\text{故 } B = (A - 2E)^{-1}A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

#### 四、(本题满分 8 分)

求微分方程  $y''' + 6y'' + (9 + a^2)y' = 1$  的通解. 其中常数  $a > 0$ .

解: 由特征方程  $r^3 + 2r^2 + (9 + a^2)r = 0$ , 知其特征根为  $r_1 = 0, r_{2,3} = -3 \pm ai$ .

故对应齐次方程的通解为  $\tilde{y} = C_1 + C_2 e^{-3x} \cos x + C_3 e^{-3x} \sin x$ , 其中  $C_1, C_2, C_3$  为任意常数.

设原方程的特解为  $y^*(x) = Ax$ , 代入原方程可得  $A = \frac{1}{9 + a^2}$ .

因此, 原方程的通解为  $y(x) = \tilde{y} + y^* = C_1 + C_2 e^{-3x} \cos x + C_3 e^{-3x} \sin x + \frac{1}{9 + a^2} x$ .

#### 五、选择题 (每小题 3 分, 满分 12 分)

(1) 设常数  $k > 0$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k+n}{n^2}$  (C)

(A) 发散 (B) 绝对收敛 (C) 条件收敛 (D) 收敛与发散与  $k$  的值有关.

(2) 设  $f(x)$  为已知连续函数,  $I = t \int_0^s f(tx) dx, s > 0, t > 0$ , 则  $I$  的值 (D)

(A) 依赖于  $s$  和  $t$  (B) 依赖于  $s, t, x$   
(C) 依赖于  $t$  和  $x$ , 不依赖于  $s$  (D) 依赖于  $s$ , 不依赖于  $t$

(3) 设  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = -1$ , 则在点  $x = a$  处 (B)

(A)  $f(x)$  导数存在,  $f'(a) \neq 0$  (B)  $f(x)$  取得极大值  
(C)  $f(x)$  取得极小值 (D)  $f(x)$  的导数不存在.

(4) 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 且  $|A| = a \neq 0$ , 而  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵, 则  $|A^*| =$  (C)

(A)  $a$  (B)  $1/a$  (C)  $a^{n-1}$  (D)  $a^n$

#### 六、(本题满分 10 分)

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^{n+1}$  的收敛域, 并求其和函数.

解: 记  $u_n = \frac{1}{n2^n} x^{n+1}$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \cdot \frac{n2^n}{x^n} \right| = \frac{|x|}{2}$ ,

令  $\frac{|x|}{2} < 1$ , 知原级数在开区间  $(-2, 2)$  内每一点都收敛.

又当  $x = -2$  时, 原级数  $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} (-2)^{n+1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ , 故由莱布尼兹判别法知其收敛;

而当  $x = 2$  时, 原级数  $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} 2^{n+1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ , 显然发散, 故幂级数的收敛域为  $[-2, 2)$ .

又记  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^{n+1} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n = xS_1(x)$ , 其中  $S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n$ ,

有  $S_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-x/2}$ , 于是  $S_1(x) = \int_0^x \frac{dx}{1-x/2} = 2 \ln\left(\frac{2}{2-x}\right)$ ,

因此幂级数的和函数为  $S(x) = 2x \ln \frac{2}{2-x}$ ,  $x \in [-2, 2)$ .

### 七、(本题满分 10 分)

计算曲面积分  $I = \iint_S x(8y+1)dydz + 2(1-y^2)dzdx - 4yzdxdy$ ,

其中  $s$  是曲线  $\begin{cases} z = \sqrt{y-1} \\ x = 0 \end{cases} \quad (1 \leq y \leq 3)$  绕  $Y$  轴旋转一周所形成的曲面, 它的法向量与  $Y$  轴

正向的夹角恒大于  $\pi/2$ .

**解:**  $S$  的方程为  $y = x^2 + z^2 + 1$ , 记  $S_1: y = 3, (x^2 + z^2) \leq 2$ , 知  $S + S_1$  为封闭曲面, 设其方向取外侧, 所围区域为  $\Omega$ , 则由高斯公式, 有

$$\begin{aligned} I &= \oiint_{S+S_1} x(8y+1)dydz + 2(1-y^2)dzdx - 4yzdxdy \\ &= \iiint_{\Omega} 1 \cdot dv - 0 - \iint_{S_1} 2(1-y^2)dydz + 0 = \int_1^3 dy \iint_{D_y} dzdx - \iint_{D_{zx}} 2(1-3^2)dzdx \\ &= \int_1^3 (y-1)dy + 16 \cdot \pi \cdot 2 = 34\pi. \end{aligned}$$

### 八、(本题满分 10 分)

设函数  $f(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上可微, 对于  $[0, 1]$  上的每个  $x$ , 函数的值都在开区间  $(0, 1)$  内, 且  $f'(x) \neq 1$ . 证明 在  $(0, 1)$  内有且仅有一个  $x$ , 使  $f(x) = x$ .

**证:** 令  $h(t) = f(t) - t$ , 知  $h(t)$  在闭区间  $[0, 1]$  上连续, 又由题设知  $0 < f(x) < 1$ , 于是有  $h(0) = f(0) - 0 > 0$ ,  $h(1) = f(1) - 1 < 0$ . 故由零点定理, 在  $(0, 1)$  内有  $x$ , 使  $f(x) = x$ .

假若  $f(x)$  在开区间  $(0, 1)$  内有两个不同的点  $x_1$  和  $x_2$ , 使得  $f(x_1) = x_1$ ,  $f(x_2) = x_2$ , 不妨设  $x_1 < x_2$ , 则易见  $f(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 故由拉格朗日定理知,

$\exists \xi \in (0,1)$ , 使得  $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ , 即  $f'(\xi) = 1$ . 此与  $f'(x) \neq 1$  矛盾! 故在  $(0,1)$  内使  $f(x) = x$  的  $x$  只能有一个.

### 九、(本题满分 8 分)

问  $a, b$  为何值时, 线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$
 有唯一解? 无解? 有无穷多解?

并求出无穷多解时的通解.

**解:** 对方程组的增广矩阵进行初等变换, 得

$$\tilde{A} = (A \ b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

① 当  $a \neq 1$  时, 系数行列式  $|A| = (a-1)^2 \neq 0$ , 故由克拉姆法则, 原方程组有唯一解;

② 当  $a = 1$ , 且  $b \neq -1$  时,  $r(\tilde{A}) = 3, r(A) = 2$ ,  $r(\tilde{A}) \neq r(A)$ , 故原方程组无解;

③ 当  $a = 1$ , 且  $b = -1$  时,  $r(\tilde{A}) = r(A) = 2 < 4$ , 故原方程组有无穷的解. 此时显然有

$$\tilde{A} = (A \ b) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见其通解为:  $x = (-1, 1, 0, 0)^T + c_1(1, -2, 1, 0)^T + c_2(1, -2, 0, 1)^T$ , 其中  $c_1, c_2$  为任意常数.

### 十、填空题 (每小题 2 分, 满分 6 分)

(1) 在一次试验中事件 A 发生的概率为  $p$ , 现进行  $n$  次独立试验, 则 A 至少发生一次的概率为  $1 - (1-p)^n$ ; 而事件 A 至多发生一次的概率为  $[1 + (n-1)p](1-p)^{n-1}$ .

(2) 三个箱子, 第一个箱子有 4 个黑球 1 个白球, 第二个箱子中有 3 个白球 3 个黑球, 第三个箱子中有 3 个黑球 5 个白球, 现随机地取一个箱子, 再从这个箱子中取一个球, 这个球为白球的概率为  $53/120$ , 已知取出的是白球, 此球属于第二箱的概率是  $20/53$ .

---

(3) 已知连续随机变量  $X$  的密度为  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+2x-1}$ , 则  $X$  的数学期望为 1;  $X$  的方差为 1/2.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量  $X, Y$  相互独立, 其概率密度函数分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}; f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}, \text{求随机变量 } Z=2X+Y \text{ 的概率密度函数 } f_z(z).$$

**解:** 由题设,  $(X, Y)$  的联合密度为  $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & 0 \leq x \leq 1, y > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ ,

故  $Z$  的分布函数  $F_z(z) = P(Z \leq z) = P(2X + Y \leq z) = \iint_{2x+y \leq z} f(x, y) dx dy$ ,

① 当  $z < 0$  时,  $F_z(z) = \iint_{2x+y \leq z} 0 dx dy = 0$ , 此时  $f_z(z) = 0' = 0$ ;

② 当  $0 \leq z \leq 2$  时,  $F_z(z) = \int_0^z dy \int_0^{\frac{z-y}{2}} e^{-y} dx = \frac{z}{2} \int_0^z e^{-y} dy - \frac{1}{2} \int_0^z y e^{-y} dy$ , 此时

$$f_z(z) = F'_z(z) = \frac{1}{2} \int_0^z e^{-y} dy = \frac{1}{2} (1 - e^{-z});$$

③ 当  $z > 2$  时,  $F_z(z) = \int_0^1 dx \int_0^{z-2x} e^{-y} dy = \int_0^1 (1 - e^{2x-z}) dx = 1 - \frac{1}{2} (e^{-2} - 1) e^{-z}$ , 此时

$$f_z(z) = F'_z(z) = \frac{1}{2} (e^{-2} - 1) e^{-z}$$

综上所述,  $Z=2X+Y$  的概率密度函数为  $f_z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{1}{2} (1 - e^{-z}) & 0 \leq z \leq 2 \\ \frac{1}{2} e^{-z} (e^{-2} - 1) & z > 2 \end{cases}$