

1987 年全国硕士研究生入学统一考试

数学试题参考解答

数 学 (试卷 IV)

一、判断题 (每小题答对得 2 分, 答错得 -1 分, 不答得 0 分, 全题最低 0 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$ (×)

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx = 0$ (√)

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 必发散 (×)

(4) 假设 D 是矩阵 A 的 r 阶子式, 且含 D 的一切 $r+1$ 阶子式都等于 0, 那么矩阵 A 的一切 $r+1$ 阶子式都等于 0 (√)

(5) 连续型随机变量取任何给定实数值的概率都等于 0 (√)

二、选择题 (每小题 2 分, 满分 10 分.)

(1) 下列函数在其定义域内连续的是 (A)

(A) $f(x) = \ln x + \sin x$ (B) $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \leq 0 \\ \cos x & x > 0 \end{cases}$

(C) $f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x-1 & x > 0 \end{cases}$ (D) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x|}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导, x_1, x_2 是区间内任意两点, 且 $x_1 < x_2$, 则至少存一点 ξ , 使得 (C)

(A) $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a), a < \xi < b.$

(B) $f(b) - f(x_1) = f'(\xi)(b-x_1), x_1 < \xi < b.$

(C) $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2-x_1), x_1 < \xi < x_2.$

(D) $f(x_2) - f(a) = f'(\xi)(x_2-a), a < \xi < x_2.$

(3) 下列广义积分收敛的是 (C)

(A) $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ (B) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ (C) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ (D) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

(4) 设 A 是 n 阶方阵, 其秩 $r < n$, 那么在 A 的 n 个行向量中 (A)

(A) 必有 r 个行向量线性无关

(B) 任意 r 个行向量线性无关

(C) 任意 r 个行向量都构成极大线性无关向量组

(D) 任意一个行向量都可以由其它 r 个行向量线性表示

(5) 若二事件 A 和 B 同时出现的概率 $P(AB) = 0$, 则 (C)

(A) A 和 B 互不相容 (互斥)

(B) AB 是不可能事件

(C) AB 未必是不可能事件

(D) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$

三、计算下列各题 (每小题 4 分, 满分 16 分)

(1) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + xe^x)^{\frac{1}{x}}$.

解: 因 $(1 + xe^x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+xe^x)}{x}}$, 而 $\frac{\ln(1+xe^x)}{x} \sim xe^x$ (当 $x \rightarrow 0$),

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+xe^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$, 从而 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + xe^x)^{\frac{1}{x}} = e$.

(2) 已知 $y = \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$, 求 y' .

解: $y = \ln(\sqrt{1+x^2}-1) - \ln(\sqrt{1+x^2}+1)$, $y' = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}-1} - \ln \frac{2\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{2}{x\sqrt{1+x^2}}$.

(3) 已知 $z = \arctg \frac{x+y}{x-y}$, 求 dz .

解: $dz = \frac{d(\frac{x+y}{x-y})}{1+(\frac{x+y}{x-y})^2} = \frac{(x-y)(dx+dy) - (x+y)(dx-dy)}{(x-y)^2} = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$

(4) 求不定积分 $\int e^{\sqrt{2x-1}} dx$.

解: 令 $\sqrt{2x-1} = t$, 有

$$\int e^{\sqrt{2x-1}} dx = \int e^t t dt = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + c = (\sqrt{2x-1} - 1)e^{\sqrt{2x-1}} + c$$

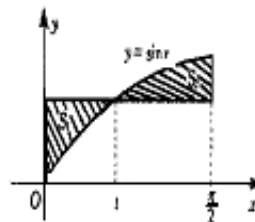
四、(本题满分 10 分)

考虑函数 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi/2$), 问:

(1) t 取何值时, 图中阴影部分的面积 s_1 与 s_2 之和 $s = s_1 + s_2$ 最小?

(2) t 取何值时, $s = s_1 + s_2$ 最大?

解: 因 $s_1 = t \sin t - \int_0^t \sin x dx = t \sin t + \cos t - 1$,



$$s_2 = \int_t^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - (\frac{\pi}{2} - t) \sin t = \cos t + t \sin t - \frac{\pi}{2} \sin t,$$

故 $s = s_1 + s_2 = 2t \sin t + 2 \cos t - \frac{\pi}{2} \sin t - 1, (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$.

令 $s' = 0$, 得 s 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内的驻点 $t = \frac{\pi}{4}$. 而 $s(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} - 1$, $s(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 1$, $s(0) = 1$,

因此 $t = \frac{\pi}{4}$ 时, s 最小; $t = 0$ 时, s 最大.

五、(本题满分 6 分)

将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ 展成 x 的级数, 并指出收敛区间.

解: 因 $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}},$

而 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1, 1)$, 且 $\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$, $x \in (-2, 2)$,

故 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \frac{1}{2^{n+1}}) x^n$, 其收敛区间为 $(-1, 1)$.

六、(本题满分 5 分)

计算二重积分 $\iint_D e^{x^2} dx dy$, 其中 D 是第一象限中由直线 $y = x$ 和 $y = x^3$ 围成的封闭区域.

解: 联立 $y = x$ 和 $y = x^3$, 可解得两曲线交点的横坐标 $x = 0$ 和 $x = 1$, 于是

$$\iint_D e^{x^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^3}^x e^{x^2} dy = \int_0^1 (x - x^3) e^{x^2} dx = \frac{e}{2} - 1$$

七、(本题满分 6 分)

已知某商品的需求量 x 对价格 P 的弹性为 $\eta = -3p^3$, 而市场对商品的最高需求量为 1 (万件), 求需求函数.

解: 由弹性的定义, 有 $\frac{p}{x} \frac{dx}{dp} = -3p^3$, 即 $\frac{dx}{x} = -3p^2 dp$,

于是有 $x = ce^{-p^3}$, c 为待定常数.

由题意 $p = 0$ 时, $x = 1$, 故 $c = 1$, 因此 $x = e^{-p^3}$.

八、(本题满分 8 分)

$$\text{解线性方程组} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -4 \\ x_1 + x_3 - x_4 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 7x_1 + 7x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases} \quad \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, k \text{ 为任意常数} \right]$$

解：对方程组的增广矩阵进行初等行变换，有

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 7 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故原方程组与下方程组同解：

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_3 \\ x_2 = -8 + 2x_3, \text{ 令 } x_3 = 0, \text{ 可得原方程组的特解 } \beta = (3, -8, 0, 6)^T. \\ x_4 = 6 \end{cases}$$

又显然原方程组的导出组与下方程组同解：

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 2x_3, \text{ 令 } x_3 = 1, \text{ 可得导出组的基础解系 } \eta = (-1, 2, 1, 0)^T. \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

因此原方程组的通解为： $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, -8, 0, 6)^T + k(-1, 2, 1, 0)^T$ ，其中 k 为任意常数.

九、(本题满分 7 分)

$$\text{设矩阵 } A \text{ 和 } B \text{ 满足 } AB = A + 2B, \text{ 求矩阵 } B, \text{ 其中 } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

解：因 $AB = A + 2B$ ，故 $AB - 2B = A$ ，即 $(A - 2E)B = A$ ，

$$\text{故 } B = (A - 2E)^{-1}A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

十、(本题满分 6 分)

$$\text{求矩阵 } A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 的实特征值及对应的特征向量.}$$

解: 令 $|\lambda E - A| = 0$, 即 $(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0$, 可见矩阵 A 只有一个实特征值 $\lambda = 1$.

易见, 线性方程组 $(\lambda E - A)X = 0$ 的基础解系为 $(0, 2, 1)^T$, 故 A 对应于实特征值 $\lambda = 1$ 的特征向量为 $k(0, 2, 1)^T$, (其中 k 为非零任意常数).

十一、(每小题 4 分, 满分 8 分)

(1) 已知随机变量 X 的概率分布为 $P(X = 1) = 0.2, P(X = 2) = 0.3, P(X = 3) = 0.5$, 试写出 X 的分布函数 $F(x)$.

解: X 的分布函数为
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0.2, & 1 \leq x < 2 \\ 0.5, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}.$$

(2) 已知随机变量 Y 的概率密度为 $f(y) = \begin{cases} \frac{y}{a^2} e^{-\frac{y^2}{2a^2}} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$, 求随机变量 $Z = \frac{1}{Y}$ 的数学期望 EZ .

解:
$$EZ = E\left(\frac{1}{Y}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y} f(y) dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y} \cdot \frac{y}{a^2} e^{-\frac{y^2}{2a^2}} dy = \sqrt{2\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}a^2} e^{-\frac{y^2}{2a^2}} dy = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}.$$

十二、(本题满分 8 分)

设有两箱同种零件. 第一箱内装 50 件, 其中 10 件一等品; 第二箱内装有 30 件, 其中 18 件一等品. 现从两箱中随机挑出一箱, 然后从该箱中先后随机取出两个零件 (取出的零件均不放回), 试求:

(1) 先取出的零件是一等品的概率 p ;

(2) 在先取出的零件是一等品的条件下, 第二次取出的零件仍然是一等品的条件概率 q .

解: 设 $B_i = \{\text{取出的零件为第 } i \text{ 箱中的}\}$, $A_j = \{\text{第 } j \text{ 次取出的是一等品}\}$, $i, j = 1, 2$, 显然 B_1, B_2 为正概完备事件组, 故全概公式得

(1)
$$p = P(A_1) = P(B_1)P(A_1|B_1) + P(B_2)P(A_1|B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{50} + \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{30} = \frac{2}{5};$$

(2)
$$P(A_1 A_2) = P(B_1)P(A_1 A_2|B_1) + P(B_2)P(A_1 A_2|B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10 \times 9}{50 \times 49} + \frac{1}{2} \cdot \frac{18 \times 17}{30 \times 29} = \frac{276}{1421},$$

于是, 由贝叶斯公式得 $q = P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} = \frac{690}{1421} \approx 0.48557$.