

1987 年全国硕士研究生入学统一考试

数学试题参考解答

数 学 (试 卷 III)

一、填空题 (每小题 2 分, 满分 10 分. 把答案填在题中横线上)

(1) 设 $y = \ln(1+ax)$, 其中 a 为非零常数, 则 $y' = \frac{a}{1+ax}$, $y'' = -\frac{a^2}{(1+ax)^2}$.

(2) 曲线 $y = \arctg x$ 在横坐标为 1 点处的切线方程是 $y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi-2}{4}$; 法线方程是 $y = -2x + (\pi+8)/4$.

(3) 积分中值定理的条件是 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 结论是 $\exists \xi \in [a, b],$ 使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n-2}{n+1})^n = e^{-3}$.

(5) $\int f'(x)dx = f(x) + c$; $\int_a^b f'(2x)dx = \frac{1}{2}f(2b) - \frac{1}{2}f(2a)$.

二、(本题满分 6 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1})$

解: $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$.

三、(本题满分 7 分)

设 $\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

解: 因 $\frac{dy}{dt} = 5 \sin t, \frac{dx}{dt} = 5 - 5 \cos t, \frac{dy}{dx} = \frac{5(0 + \sin t)}{5(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$, 故 $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$,

且 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} (\frac{\sin t}{1 - \cos t}) \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{5(1 - \cos t)^2}$

四、(本题满分 8 分)

计算定积分 $\int_0^1 x \arcsin x dx$.

解: $\int_0^1 x \arcsin x dx = \frac{1}{2} x^2 \arcsin x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx,$

令 $x = \sin t$, 有 $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{\cos t} \cos t dt = \frac{\pi}{4}$, 因此 $\int_0^1 x \arcsin x dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$.

五、(本题满分 8 分)

设 D 是曲线 $y = \sin x + 1$ 与三条直线 $x = 0, x = \pi, y = 0$ 围成的曲边梯形. 求 D 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转体的体积.

解: $V = \pi \int_0^\pi (\sin x + 1)^2 dx = 4\pi + \frac{3\pi^2}{2}$.

六、证明题 (本题满分 10 分)

(1) (5 分) 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, 且导数 $f'(x)$ 恒大于零, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加.

证: $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 则 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上连续, 在 (x_1, x_2) 内可导, 故由拉格朗日中值定理, $\exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$, 使得 $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. 由于 $f'(x)$ 在 (a, b) 内恒大于零, 所以 $f'(\xi) > 0$, 又 $x_2 - x_1 > 0$, 因此 $f(x_2) - f(x_1) > 0$, 即 $f(x_2) > f(x_1)$, 表明 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加.

(2) (5 分) 若 $g(x)$ 在 $x = c$ 处二阶导数存在, 且 $g'(c) = 0, g''(c) < 0$, 则 $g(c)$ 为 $g(x)$ 的一个极大值.

证: 因 $g''(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{g'(x) - g'(c)}{x - c} < 0$, 而 $g'(c) = 0$, 故 $\lim_{x \rightarrow c} \frac{g'(x)}{x - c} < 0$. 由极限的保号性, $\exists \delta > 0$, 当 $x \in (c - \delta, c)$ 时, 有 $\frac{g'(x)}{x - c} < 0$, 即 $g'(x) > 0$, 从而 $g(x)$ 在 $(c - \delta, c)$ 单增; 当 $x \in (c, c + \delta)$ 时, 有 $\frac{g'(x)}{x - c} < 0$, 即 $g'(x) < 0$, 从而 $g(x)$ 在 $(c, c + \delta)$ 单减. 又由 $g'(c) = 0$ 知, $x = c$ 是 $g(x)$ 的驻点, 因此 $g(c)$ 为 $g(x)$ 的一个极大值.

七、(本题满分 10 分)

计算不定积分 $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$ (其中 a, b 为不全为零的非负数)

解: ① 当 $a = 0$ 时, 原式 $= \frac{1}{b^2} \int \sec^2 x dx = \frac{1}{b^2} \tan x + c$;

② 当 $b = 0$ 时, 原式 $= \frac{1}{a^2} \int \csc^2 x dx = -\frac{1}{a^2} \cot x + c$;

③ 当 $ab \neq 0$ 时, 原式 $= \int \frac{\sec^2 x dx}{a^2 \tan^2 x + b^2} = \frac{1}{ab} \int \frac{d(\frac{a}{b} \tan x)}{(\frac{a}{b} \tan x)^2 + 1} = \frac{1}{ab} \arctan(\frac{a}{b} \tan x) + c$.

八、(本题满分 15 分)

(1) (7 分) 求微分方程 $x \frac{dy}{dx} = x - y$, 满足条件 $y|_{x=\sqrt{2}} = 0$ 的解.

解: 原方程即 $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 1$, 故其通解为 $y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} (\int e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + c) = \frac{1}{x} (\frac{1}{2} x^2 + c)$.

因 $y|_{x=\sqrt{2}} = 0$, 所以 $c = -1$. 于是所求初值问题的解为 $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{x}$.

(2) (8 分) 求微分方程 $y'' + 2y' + y = xe^x$ 的通解.

解: 由特征方程 $r^2 + 2r + 1 = 0$, 知其特征根为 $r_{1,2} = -1$.

故对应齐次方程的通解为 $\tilde{y} = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

设原方程的特解为 $y^*(x) = e^x(ax + b)$, 代入原方程可得 $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{4}$.

因此, 原方程的通解为 $y(x) = \tilde{y} + y^* = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \frac{1}{4}(x-1)e^x$.

九、选择题 (每小题 4 分, 满分 16 分)

(1). $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x}$, $-\infty < x < +\infty$ 是 (D)

(A) 有界函数 (B) 单调函数 (C) 周期函数 (D) 偶函数

(2). 函数 $f(x) - x \sin x$ (D)

(A) 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷大 (B) 当 $x \rightarrow \infty$ 时有极限

(C) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界 (D) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界

(3) 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a-x)}{x}$ 等于 (B)

(A) $f'(a)$ (B) $2f'(a)$ (C) 0 (D) $f'(2a)$

(4) 设 A 为 n 阶方阵, 且 $|A| = a \neq 0$, 而 A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $|A^*| =$ (C)

(A) a (B) $1/a$ (C) a^{n-1} (D) a^n

十、(本题满分 10 分)

在第一象限内, 求曲线 $y = -x^2 + 1$ 上的一点, 使该点处切线与所给曲线及两坐标围成的面积为最小, 并求此最小面积.

解: 设切点的横坐标为 a , 则切线方程为 $y - (1 - a^2) = -2a(x - a)$, 即 $y = -2ax + a^2 + 1$

故所围面积 $s = \frac{1}{2}(a^2 + 1) \frac{a^2 + 1}{2a} - \int_0^1 (-x^2 + 1) dx = \frac{a^3}{4} + \frac{a}{2} + \frac{1}{4a} - \frac{2}{3}$. 令 $s' = 0$ 得驻点 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

由于 $s''|_{a=\sqrt{3}/3} > 0$, 故所求点的坐标为 $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3})$, 其最小值为 $s|_{a=\sqrt{3}/3} = \frac{4}{9}\sqrt{3} - \frac{2}{3}$.