

1988 年全国硕士研究生入学统一考试

数学试题参考解答及评分标准

数 学 (试 卷 一)

一. (本题满分 15 分, 每小题 5 分)

(1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 3^n}$ 的收敛域.

解: 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 3^n}{(x-3)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3(n+1)} |x-3| = \frac{1}{3} |x-3|$, 故 $\frac{1}{3} |x-3| < 1$ 即 $0 < x < 6$ 时,

幂级数收敛.3 分

当 $x=0$ 时, 原级数成为交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, 是收敛的.4 分

当 $x=6$ 时, 原级数成为调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 是发散的.5 分

所以, 所求的收敛域为 $[0, 6)$.

(2) 已知 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1-x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$. 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

解: 由 $e^{[\varphi(x)]^2} = 1-x$, 得 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$3 分

由 $\ln(1-x) \geq 0$, 得 $1-x \geq 1$ 即 $x \leq 0$5 分

所以 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$, 其定义域为 $(-\infty, 0)$.

(3) 设 S 为曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧, 计算曲面积分 $I = \oiint_S x^3 dydz + y^3 dx dx + z^3 dx dy$.

解: 根据高斯公式, 并利用球面坐标计算三重积分, 有

$$I = 3 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv \quad (\text{其中 } \Omega \text{ 是由 } S \text{ 所围成的区域}) \quad \text{.....2 分}$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr \quad \text{.....4 分}$$

$$= \frac{12\pi}{5}. \quad \text{.....5 分}$$

二、填空题：(本题满分 12 分，每小题 3 分)

- (1) 若 $f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} t(1 + \frac{1}{x})^{2tx}$, 则 $f'(t) = \underline{(2t+1)e^{2t}}$
- (2) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在区间 $(-1, 1]$ 上的定 $f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \leq 0 \\ x^3, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的付立叶级数在 $x=1$ 处收敛于 $\underline{\frac{2}{3}}$.
- (3) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $\int_0^{x^3-1} f(t)dt = x$, 则 $f(7) = \underline{\frac{1}{12}}$.
- (4) 设 4×4 矩阵 $A = (\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, $B = (\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, 其中, $\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 均为 4 维列向量, 且已知行列式 $|A| = 4, |B| = 1$, 则行列式 $|A+B| = \underline{40}$.

三、选择题 (本题满分 15 分，每小题 3 分)

- (1) 若函数 $y=f(x)$ 有 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 该函 $x=x_0$ 处的微分 dy 是 (B)
- (A) 与 Δx 等价的无穷小 (B) 与 Δx 同阶的无穷小
(C) 比 Δx 低阶的无穷小 (D) 比 Δx 高阶的无穷小
- (2) 设 $y = f(x)$ 是方程 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的一个解, 若 $f(x) > 0$, 且 $f'(x_0) = 0$, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 (A)
- (A) 取得极大值 (B) 取得极小值
(C) 某个邻域内单调增加 (D) 某个邻域内单调减少
- (3) 设有空间区域 $\Omega_1: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$; 及 $\Omega_2: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, 则 (C)
- (A) $\iiint_{\Omega_1} x dv = 4 \iiint_{\Omega_2} x dv$ (B) $\iiint_{\Omega_1} y dv = 4 \iiint_{\Omega_2} y dv$
(C) $\iiint_{\Omega_1} z dv = 4 \iiint_{\Omega_2} z dv$ (D) $\iiint_{\Omega_1} xyz dv = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz dv$
- (4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛, 则此级数在 $x=2$ 处 (B)
- (A) 条件收敛 (B) 绝对收敛
(C) 发散 (D) 收敛性不能确定
- (5) n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (3 \leq s \leq n)$ 线性无关的充分必要条件是 (D)
- (A) 有一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s \neq 0$.
(B) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意两个向量都线性无关.
(C) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中存在一个向量, 它不能用其余向量线性表出.
(D) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表出.

四. (本题满分 6 分)

设 $u = yf\left(\frac{x}{y}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中 f, g 具有二阶连续导数, 求 $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

解: $\frac{\partial u}{\partial x} = f'\left(\frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} g'\left(\frac{y}{x}\right).$ 2 分

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{y} f''\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{y^2}{x^3} g''\left(\frac{y}{x}\right).$$
3 分

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{x}{y^2} f''\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{y}{x^2} g''\left(\frac{y}{x}\right).$$
5 分

所以 $x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$ 6 分

五、(本题满分 8 分)

设函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$, 且图形在点 $(0, 1)$ 处的切线与曲线 $y = x^2 - x + 1$ 在该点的切线重合, 求函数 $y = y(x)$.

解: 对应齐次方程的通解为 $Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$ 2 分

设原方程的特解为 $y^* = Axe^x,$ 3 分

得 $A = -2.$ 4 分

故原方程通解为 $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 2xe^{2x}.$ 5 分

又已知有公共切线得 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = -1,$ 7 分

即 $\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ c_1 + 2c_2 = 1 \end{cases}$ 解得 $c_1 = 1, c_2 = 0.$ 8 分

所以 $y = (1 - 2x)e^{2x}.$

六、(本题满分 9 分)

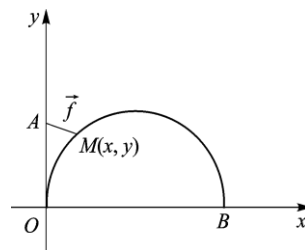
设位于点 $(0, 1)$ 的质点 A 对质点 M 的引力大小为 $\frac{k}{r^2}$ ($k > 0$ 为常数, r 为质点 A 与 M 之间的距离), 质点 M 沿曲线 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 自 $B(2, 0)$ 运动到 $O(0, 0)$. 求在此运动过程中质点 A 对质 M 点的引力所做的功.

解: $\overrightarrow{MA} = \{0 - x, 1 - y\}$ 2 分

$$r = \sqrt{x^2 + (1 - y)^2}.$$

因引力 $\vec{f}$ 的方向与 $\overrightarrow{MA}$ 一致,

故 $\vec{f} = \frac{k}{r^3} \{-x, 1 - y\}.$ 4 分



$$\text{从而 } W = \int_{\widehat{BO}} \frac{k}{r^3} [-x dx + (1-y) dy] \quad \cdots \cdots 6 \text{ 分}$$

$$= k \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right). \quad \cdots \cdots 9 \text{ 分}$$

七、(本题满分 6 分)

已知 $AP = PB$, 其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 求 A 及 A^5 .

解: 先求出 $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$2 分

$$\begin{aligned} \text{因 } AP = PB, \text{ 故 } A &= PBP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

从而 $A^5 = \overbrace{AAAAA}^{5\uparrow} = \overbrace{(PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1})}^{5\uparrow} = PB^5P^{-1} = PBP^{-1} = A$6 分

八、(本题满分 8 分)

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似,

(1) 求 x 与 y ; (2) 求一个满足 $P^{-1}AP = B$ 的可逆矩阵 P .

解: (1) 因 A 与 B 相似, 故 $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$, 即1 分

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix},$$

亦即 $(\lambda - 2)(\lambda^2 - x\lambda - 1) = (\lambda - 2)(\lambda^2 + (1 - y)\lambda - y)$.

比较两边的系数得 $x=0, y=1$. 此时 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$3 分

(2) 从 B 可以看出 A 的特征值 $\lambda = 2, 1, -1$4 分

对 $\lambda = 2$, 可求得 A 的特征向量为 $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

对 $\lambda = 1$, 可求得 A 的特征向量为 $p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

对 $\lambda = -1$, 可求得 A 的特征向量为 $p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$7 分

因上述 p_1, p_2, p_3 是属于不同特征值的特征向量, 故它们线性无关.

令 $P = (p_1, p_2, p_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 则 P 可逆, 且有 $P^{-1}AP = B$8 分

九、(本题满分 9 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且在 (a, b) 内有 $f'(x) > 0$. 证明: 在 (a, b) 内存在唯一的 ξ , 使曲线 $y = f(x)$ 与两直线 $y = f(\xi), x = a$ 所围平面图形面积 S_1 是曲线 $y = f(x)$ 与两直线 $y = f(\xi), x = b$ 所围平面图形面积 S_2 的 3 倍.

证: 存在性 在 $[a, b]$ 上任取一点 t , 令

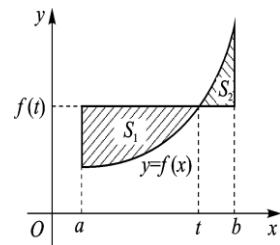
$$\begin{aligned} F(t) &= \int_a^t [f(t) - f(x)] dx - 3 \int_t^b [f(x) - f(t)] dx \\ &= \left[f(t)(t-a) - \int_a^t f(x) dx \right] - 3 \left[\int_t^b f(x) dx - f(t)(b-t) \right] \cdots 3 \text{ 分} \end{aligned}$$

则 $F(t)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

又因 $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是单调增加的.

于是在 (a, b) 内取定点 c , 有

$$\begin{aligned} F(a) &= -3 \int_a^b [f(x) - f(a)] dx = -3 \int_a^c [f(x) - f(a)] dx - 3 \int_c^b [f(x) - f(a)] dx \\ &\leq -3 \int_c^b [f(x) - f(a)] dx = -3 [f(\xi_1) - f(a)](b-c) < 0, \quad c \leq \xi_1 \leq b. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 F(b) &= \int_a^b [f(b) - f(x)]dx = \int_a^c [f(b) - f(x)]dx + \int_c^b [f(b) - f(x)]dx \\
 &\geq \int_a^c [f(b) - f(x)]dx = [f(b) - f(\xi_2)](c-a) > 0, \quad a \leq \xi_2 \leq c.
 \end{aligned}
 \quad \cdots \cdots 5 \text{ 分}$$

所以由介值定理知, 在 (a, b) 内存在 ξ , 使 $F(\xi) = 0$, 即 $S_1 = 3S_2$6 分

唯一性 因 $F'(t) = f'(t)[(t-a) + 3(b-t)] > 0$,8 分

故 $F(t)$ 在 (a, b) 内是单调增加的. 因此, 在 (a, b) 内只有一个 ξ , 使 $S_1 = 3S_2$9 分

十、填空题(共 6 分, 每个 2 分)

(1) 设三次独立实验中, 事件 A 出现的概率相等. 若已知 A 至少出现一次的概率等于 $\frac{19}{27}$, 则

事件 A 在一次试验中出现的概率为 $\frac{1}{3}$.

(2) 在区间 $(0, 1)$ 中随机地取两个数, 则事件“两数之和小于 $\frac{6}{5}$ ”的概率为 $\frac{17}{25}$.

(3) 设随机变量 X 服从均值为 10, 均方差为 0.02 的正态分布. 已知 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$, $\Phi(2.5) = 0.9938$, 则 X 落在区间 $(9.95, 10.05)$ 内的概率为 0.9876.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_x(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, 求随机变量 $Y = 1 - \sqrt[3]{X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

解: 因 Y 的分布函数

$$F_Y(y) = P(Y < y) \quad \cdots \cdots 1 \text{ 分}$$

$$= P\{1 - \sqrt[3]{X} < y\} = P\{\sqrt[3]{X} > 1 - y\} = P\{X > (1 - y)^3\} \quad \cdots \cdots 2 \text{ 分}$$

$$= \int_{(1-y)^3}^{+\infty} \frac{dx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{\pi} \arctan x \Big|_{(1-y)^3}^{+\infty} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan(1-y)^3 \right]. \quad \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

$$\text{故 } Y \text{ 的概率密度函数为 } f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{3}{\pi} \frac{(1-y)^3}{1+(1-y)^6}. \quad \cdots \cdots 6 \text{ 分}$$