

1988 年全国硕士研究生入学统一考试

数学试题参考解答及评分标准

数 学 (试卷四)

一、填空题 (本题满分 12 分, 每空 1 分)

(一) 已知函数 $f(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt, -\infty < x < \infty$.

(1) $f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

(2) $f(x)$ 的单调性: 单调增加.

(3) $f(x)$ 的奇偶性: 奇函数.

(4) $f(x)$ 图形的拐点: (0, 0).

(5) $f(x)$ 图形的凹凸性: $x < 0$ 时上凹 (下凸), $x > 0$ 时下凹 (上凸).

(6) $f(x)$ 图形的水平渐近线: $y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, y = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

(二)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$
.

(三)
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(四) 假设 $P(A) = 0.4, P(A \cup B) = 0.7$, 那么

(1) 若 A 与 B 互不相容, 则 $P(B) = 0.3$.

(2) 若 A 与 B 相互独立, 则 $P(B) = 0.5$.

二、(本题满分 10 分) (每小题, 回答正确得 2 分, 回答错误得 -1 分, 不回答得 0 分; 全题最低得 0 分)

(1) 若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ 都存在, 则极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 必存在. (×)

(2) 若 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点, 则必有 $f'(x_0) = 0$. (×)

(3) 等式 $\int_0^a f(x)dx = -\int_0^a f(a-x)dx$, 对任何实数 a 都成立. (×)

(4) 若 A 和 B 都是 n 阶非零方阵, 且 $AB=0$, 则 A 的秩必小于 n . (√)

(5) 若事件 A, B, C 满足等式 $A \cup C = B \cup C$, 则 $A=B$.

(×)

三、(本题满分 16 分, 每小题 4 分.)

(1) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x \ln x}$

解一: 此极限为 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 由罗必塔法则, 则

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (\ln x + 1)}{\ln x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x^x = 1. \quad \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

解二: 令 $t = x \ln x$, 则 $x^x = e^t$. 由于当 $x \rightarrow 1$ 时, $t \rightarrow 0$, 可见

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} e^t = 1. \quad \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

(2) 已知 $U + e^u = xy$, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

解: 由于 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{1+e^u}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{1+e^u}$,2 分

$$\text{可见 } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{1+e^u - ye^u \frac{\partial u}{\partial y}}{(1+e^u)^2} \quad \cdots \cdots 3 \text{ 分}$$

$$= \frac{1}{1+e^u} - \frac{xye^u}{(1+e^u)^3}. \quad \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

(3) 求定积分 $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$.

解一: 由于 $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})$, 可见

$$\text{原式} = \int_0^3 \frac{2d\sqrt{x}}{1+x} \quad \cdots \cdots 2 \text{ 分}$$

$$= \frac{2\pi}{3}. \quad \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

解二: 令 $\sqrt{x} = t$, $x = t^2$, $dx = 2tdt$; 当 $x = 0$ 时, $t = 0$; 当 $x = 3$ 时, $t = \sqrt{3}$;

.....1 分

$$\text{于是, 原式} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2dt}{1+t^2} \quad \cdots \cdots 2 \text{ 分}$$

$$= 2 \arctan \sqrt{x} \Big|_0^3 \quad \cdots \cdots 3 \text{ 分}$$

$$= \frac{2\pi}{3}. \quad \text{……4 分}$$

(4) 求二重积分 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} dy \int_y^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{x} dx$.

解： 在原式中交换积分次序，得 原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{6}} dx \int_0^x \frac{\cos x}{x} dy$ ……2 分

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} \quad \text{……4 分}$$

四、(本题满分 6 分，每小题 3 分)

(1) 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 的敛散性

解： 由 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+2}} \cdot \frac{n^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+2)}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^{n+1}}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}$ ，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{1}{e} < 1, \quad \text{……2 分}$$

故由级数收敛的比值判别法，知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 收敛. ……3 分

(2) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a^2$ 和 $\sum_{i=n}^{\infty} b_i^2$ 都收敛，试证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

证： 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a^2$ 和 $\sum_{i=n}^{\infty} b_i^2$ 都收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_i^2 + b_i^2)$ 收敛. ……2 分

而 $a_n b_n \leq \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$,

故由比较判别法，知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛. ……3 分

五、(本题满分 8 分)

已知某商品的需求量 D 和供给量都是价 P 的函数： $D = D(p) = \frac{a}{p^2}$ ， $S = S(p) = bp$ ，

其中 a>0 和 b>0 是常数：价格 p 是时间 t 的函数且满足方程 $\frac{dp}{dt} = k[d(p) - s(p)]$ (k 是常数)，

假设当 t=0 时价格为 1.试求：

(1) 需求量等于供给量时的均衡价格 P_e ； (2) 价格函数 $p(t)$ ； (3) 极限 $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)$.

解: (1) 当需求量等于供给量时, 有 $\frac{a}{p^2} = bp$, 即 $p^3 = \frac{a}{b}$. 故 $p_e = (\frac{a}{b})^{\frac{1}{3}}$1 分

(2) 由条件知 $\frac{dp}{dt} = k[D(p) - S(p)] = k[\frac{a}{p^2} - bp] = k \frac{b}{p^2} [\frac{a}{b} - p^3]$.

因此有 $\frac{dp}{dt} = k \frac{b}{p^2} [p_e^3 - p^3]$, 即 $\frac{p^2 dp}{p^3 - p_e^3} = -k b dt$3 分

在该式两边同时积分得 $p^3 = p_e^3 + ce^{-3kbt}$5 分

故由条件 $P(0) = 1$, 可得 $c = 1 - p_e^3$. 于是价格函数为 $p(t) = [p_e^3 + (1 - p_e^3)e^{-3kbt}]^{\frac{1}{3}}$6 分

(3) $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [p_e^3 + (1 - p_e^3)e^{-3kbt}]^{\frac{1}{3}} = p_e$ 8 分

六、(本题满分 8 分)

在曲线 $y = x^2 (x \geq 0)$ 上某点 A 处作一切线, 使之与曲线以及 x 轴所围图形的面积为

$\frac{1}{12}$, 试求:

- (1) 切点 A 的坐标;
- (2) 过切点 A 的切线方程;
- (3) 由上述所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

解: 设切点 A 的坐标为 (a, a^2) ,

则过点 A 的切线方程的斜率为

$y'|_{x=a} = 2a$, 切线方程为 $y - a^2 = 2a(x - a)$, 即 $y = 2ax - a^2$2 分

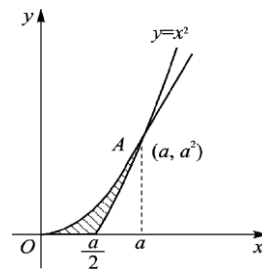
可见, 切线与 x 轴的交点为 $(\frac{a^2}{2}, 0)$. 故曲线、x 轴以上及切线这三者所围图形的面积为

$$S = \int_0^a x^2 dx - \frac{a^3}{4} = \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{4} = \frac{a^3}{12}.$$
4 分

而由题设知 $S = \frac{1}{12}$, 因此 $a = 1$5 分

于是, 切点 A 的坐标为 $(1, 1)$, 过切点 $(1, 1)$ 的切线方程为 $y = 2x - 1$6 分

旋转体的体积为 $V = \int_0^1 \pi(x^2)^2 dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \pi(2x - 1)^2 dx = \frac{\pi}{30}$8 分



七、(本题满分 8 分)

$$\text{已给线性方程组} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}, \text{问 } k_1 \text{ 和 } k_2 \text{ 各取何值时, 方程组无解? 有唯一}$$

解? 有无穷解? 在方程组有无穷解的情景下, 试求出一般解.

解: 以 $\mathbf{A}$ 表示方程组的系数矩阵, 以 $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ 表示增广矩阵,

$$\text{因 } (\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -k_1 & 15 & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 12 & k_2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -k_1+2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & k_2+5 \end{array} \right) \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

故当 $k_1 \neq 2$ 时, $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 4$, 方程组有唯一解; \dots\dots 3 分

$$\text{当 } k_1 = 2 \text{ 时, 有 } (\mathbf{A}|\mathbf{B}) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & k_2+5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_2-1 \end{array} \right) \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

这时, 若 $k_2 \neq 1$, 则 $R(\mathbf{A}) = 3 < R(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 4$, 故方程组无解;

若 $k_2 = 1$, 则 $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 3 < 4$, 故方程组有无穷多组解, 此时有 \dots\dots 6 分

$$(\mathbf{A}|\mathbf{B}) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{相应的方程组为} \begin{cases} x_1 = -8; \\ x_2 = 3 - 2x_3, \text{ 取 } x_3 = c \text{ (} c \text{ 为任意常数), 得方程组的一般解;} \\ x_4 = 2. \end{cases}$$

$$x_1 = -8, x_2 = 3 - 2c, x_3 = c, x_4 = 2. \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

综上所述: 当 $k_1 \neq 2$ 时, 方程组有唯一解; 当 $k_1 = 2$ 而 $k_2 \neq 1$ 时, 方程组无解;

当 $k_1 = 2$ 且 $k_2 = 1$ 时, 方程组有无穷多组解, 其一般解为

$$x_1 = -8, x_2 = 3 - 2c, x_3 = c, x_4 = 2, \text{ 其中 } c \text{ 为任意常数.}$$

八、(本题满分 7 分)

已知向量组 $a_1, a_2, \dots, a_s$ ($s \geq 2$) 线性无关, 设 $\beta_1 = a_1 + a_2, \beta_2 = a_2 + a_3, \dots, \beta_{s-1} = a_{s-1} + a_s, \beta_s = a_s + a_1$,

讨论向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 的线性相关性.

解: 假设 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 是一数组, 满足条件 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_s\beta_s = 0$ 1 分

那么, 有 $(k_s + k_1)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + \dots + (k_{s-1} + k_s)\alpha_s = 0$.

由于 $a_1, a_2, \dots, a_s$ 线性无关, 故有
$$\begin{cases} k_s + k_1 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ k_{s-1} + k_s = 0 \end{cases} \quad (*) \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

此方程组的系数行列式为 s 阶行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{s+1} = \begin{cases} 2, & \text{若 } s \text{ 为奇数} \\ 0, & \text{若 } s \text{ 为偶数} \end{cases} \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

若 s 为奇数, 则 $D = 2 \neq 0$, 故方程组 $(*)$ 只有零解, 即 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 必全为 0.

这时, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关.

若 s 为偶数, 则 $D = 0$, 故方程组 $(*)$ 有非零解, 即存在不全为 0 的数组 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_s\beta_s = 0$. 这时, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性相关,7 分

九、(本题满分 6 分)

设 A 是三阶方阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, A 的行列式 $|A| = \frac{1}{2}$. 求行列式 $|(3A)^{-1} - 2A^*|$ 的值.

解: 因 $(3A)^{-1} = \frac{1}{3}A^{-1}$,2 分

故 $A^* = |A| \cdot A^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1}$,3 分

所以 $|(3A)^{-1} - 2A^*| = \left| \frac{1}{3}A^{-1} - A^{-1} \right| = \left| -\frac{2}{3}A^{-1} \right| = \left(-\frac{2}{3} \right)^3 |A^{-1}|$ 5 分

$$= -\frac{16}{27}. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

十、(本题满分 7 分)

玻璃杯成箱出售, 每箱 20 只, 假设各箱含 0, 1, 2 只残次品的概率是 0.8, 0.1 和 0.1, 一顾客欲购买一箱玻璃杯, 在购买时, 售货员随意取一箱, 而顾客开箱随机观察 4 只, 若无

残次品，则购买下该玻璃杯，否则退回.试求：

(1) 顾客买下该箱的概率 α ； (2) 在顾客买下的一箱中，确实没有残次品的概率 β .

解： 设 $B_i = \{\text{箱中恰有 } i \text{ 件残品次品}\} (i = 0, 1, 2)$, $A = \{\text{顾客买下所察看的一箱}\}$.

……1 分

由题意知 $P(B_0) = 0.8, P(B_1) = 0.1, P(B_2) = 0.1$; $P(A|B_0) = 1, P(A|B_1) = \frac{C_{19}^4}{C_{20}^4} = \frac{4}{5}$;

$$P(A|B_2) = \frac{C_{18}^4}{C_{20}^4} = \frac{12}{19}. \quad \text{……3 分}$$

$$(1) \text{ 由全概率公式 } \alpha = P(A) = \sum_{i=0}^2 P(B_i)P(A|B_i) = 0.8 + \frac{0.4}{5} + \frac{1.2}{19} \approx 0.94; \quad \text{……5 分}$$

$$(2) \text{ 由贝叶斯公式 } \beta = P(B_0|A) = \frac{P(B_0)P(A|B_0)}{P(A)} \approx \frac{0.8}{0.94} \approx 0.85. \quad \text{……7 分}$$

十一、(本题满分 6 分)

某保险公司多年的统计资料表明，在索赔户中被盗索赔户占 20%，以 X 表示在随意抽查的 100 个索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数.

(1) 写出 X 的概率分布；

(2) 利用棣莫佛拉普拉斯定理，求出索赔户不少于 14 户且不多于 30 户的概率的近似值.

解：(1) X 服从二项分布，参数 $n = 100, p = 0.2$ ，其概率分布为

$$P\{X = k\} = C_{100}^k 0.2^k 0.8^{100-k} \quad (k = 0, 1, \dots, 100). \quad \text{……2 分}$$

$$(2) \text{ 由 } X \sim B(n, p) \text{ 知, } EX = np = 20, DX = np(1-p) = 16, \quad \text{……4 分}$$

故根据棣莫佛—拉普拉斯定理，有

$$P\{14 \leq X \leq 30\} = P\left\{\frac{14-20}{\sqrt{16}} \leq \frac{X-20}{\sqrt{16}} \leq \frac{30-20}{\sqrt{16}}\right\} = P\left\{-1.5 \leq \frac{X-20}{4} \leq 2.5\right\} \quad \text{……5 分}$$
$$\approx \Phi(2.5) - \Phi(-1.5) = \Phi(2.5) - [1 - \Phi(1.5)] = 0.994 - [1 - 0.933] = 0.927. \quad \text{……6 分}$$

十二、(本题满分 6 分)

假设随机变量 X 在区间 $(1, 2)$ 上服从均匀分布.试求随机变量 $Y = e^{2x}$ 的概率密度 $f(y)$.

$$\text{解：由条件知, } X \text{ 的密度函数为 } p(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } 1 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \text{……1 分}$$

记 $F(y) = P\{Y \leq y\}$ 为 Y 的分布函数，则有

$$F(y) = \begin{cases} 0, & \text{若 } y \leq e^2 \\ \int_1^{\frac{1}{2}\ln y} dx, & \text{若 } e^2 < y < e^4 \\ 1, & \text{若 } y \geq e^4 \end{cases}$$

.....2分

.....3分

.....4分

因此 $f(y) = F'(y) = \begin{cases} 0, & \text{若 } y < e^2 \\ \frac{1}{2y}, & \text{若 } e^2 < y < e^4 \\ 0, & \text{若 } y > e^4 \end{cases}$ 于是 (当 $y = e^2, e^4$ 时, 补充定义 $f(y) = 0$), 得

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2y}, & \text{若 } e^2 < y < e^4 \\ 0 & \text{若 } y > e^4 \end{cases}.$$

.....6分