

1989 年全国硕士研究生入学统一考试

数学试题参考解答及评分标准

数 学（试卷四）

一、填空题：（本题满分 15 分，每小题 3 分）

(1) 曲线 $y = x + \sin^2 x$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2})$ 处的切线方程是 $y = x + 1$.

(2) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$ 的收敛域是 $[-1, 1)$.

(3) 齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 只有零解，则 λ 应满足的条件是 $\lambda \neq 1$.

(4) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{若 } x < 0 \\ A \sin x & \text{若 } 0 \leq x \leq \pi/2, \\ 1 & \text{若 } x > \pi/2 \end{cases}$ ，则 $A = 1$;

$P\{|x| < \frac{\pi}{6}\} = 1/2$.

(5) 设随机变量 X 的数学期望 $EX = \mu$ ，方差 $DX = \sigma^2$ ，则由切比雪夫(Chebyshev)不等式，有 $P\{|X - \mu| \geq 3\sigma\} \leq 1/9$.

二、选择题：（本题满分 15 分，每小题 3 分）

(1) 设 $f(x) = 2^x + 3^x - 2$ ，则当 $x \rightarrow 0$ 时， (B)

- (A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小量 (B) $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小量
(C) $f(x)$ 是比 x 较高阶的无穷小量 (D) $f(x)$ 是比 x 较低阶的无穷小量

(2) 在下列等式中，正确的结果是 (C)

- (A) $\int f'(x)dx = f(x)$ (B) $\int df(x) = f(x)$
(C) $\frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x)$ (D) $d \int f(x)dx = f(x)$

(3) 设 A 是 4 阶矩阵，且 A 的行列式 $|A|$ (C)

- (A) 必有一列元素全为 0；
(B) 必有两列元素对应成比例；
(C) 必有一列向量是其余列向量的线性组合；
(D) 任一系列向量是其余列向量的线性组合.

(4) 设 A 和 B 均为 $n \times n$ 矩阵，则必有 (C)

- (A) $|A+B| = |A|+|B|$ (B) $AB=BA$
(C) $|AB| = |BA|$ (D) $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

(5) 以 A 表示事件 “甲种产品畅销, 乙种产品滞销”, 则其对立事件 $\bar{A}$ 为 (D)

(A) “甲种产品滞销, 乙种产品畅销” (B) “甲, 乙产品均畅销”

(C) “甲种产品滞销” (D) “甲种产品滞销或乙种产品畅销”

三、计算题 (本题满分 15 分, 每小题 5 分)

(1) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x})^x$

解: 设 $u = \frac{1}{x}$, 则当 $x \rightarrow \infty$ 时, $u \rightarrow 0$.

$$\text{原式} = \lim_{u \rightarrow 0} (\sin u + \cos u)^{\frac{1}{u}} = e^{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin u + \cos u)}{u}}. \quad \dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{而 } \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin u + \cos u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos u - \sin u}{\sin u + \cos u} = 1 \quad \dots 4 \text{ 分}$$

于是原式 $= e$. \dots 5 \text{ 分}

(2) 已知 $z = f(u, v)$, $u = x + y$, $v = xy$, 且 $f(u, v)$ 的二阶偏导数都连续, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

$$\text{解: } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \quad \dots 2 \text{ 分}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + y \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial f}{\partial v} \quad \dots 4 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + x \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + y \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + xy \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (x + y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + xy \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial v}. \end{aligned} \quad \dots 5 \text{ 分}$$

(3) 求微分方程 $y'' + 5y' + 6y = 2e^{-x}$ 的通解.

解: 由特征方程为 $r^2 + 5r + 6 = (r + 2)(r + 3) = 0$, 知特征根为 $-2, -3$. \dots 1 \text{ 分}

于是对应齐次微分方程的通解为 $\bar{y}(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$. \dots 2 \text{ 分}

其中 C_1, C_2 为任意常数. 设所给非齐次方程的特解为 $y^*(x) = Ae^{-x}$. \dots 3 \text{ 分}

将 $y^*(x)$ 代入原方程, 可得 $A = 1$, 故所给非齐次微分方程的特解为 $y^*(x) = e^{-x}$. \dots 4 \text{ 分}

从而, 所给微分方程的通解为 $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + e^{-x}$. \dots 5 \text{ 分}

四、(本题满分 9 分)

设某厂家打算生产一批商品投放市场, 已知该商品的需求函数为

$p = p(x) = 10e^{-\frac{x}{2}}$ 且最大需求量为 6, 其中 x 表示需求量, p 表示价格.

(1) 求该商品的边际收益函数; (2 分)

(2) 求使收益最大时的产量, 最大收益和相应价格. (4 分)

(3) 画出收益函数的图形. (3 分)

解：(1) 收益函数为 $R(x) = px = 10xe^{-\frac{x}{2}}$, $0 \leq x \leq 6$; ,,, 1 分

边际收益函数为 $MR = \frac{dR}{dx} = 5(2-x)e^{-\frac{x}{2}}$. ,,, 2 分

(2) 由 $R' = 5(2-x)e^{-\frac{x}{2}} = 0$, 得驻点 $x_0 = 2$.

由于 $R''|_{x=0} = \frac{5}{2}(x-4)e^{-\frac{x}{2}} \Big|_{x=0} = -5e^{-1} < 0$. ,,, 4 分

可见 $R(x)$ 在点 $x = 2$ 处达到极大值, 亦即最大值 $R(2) = 10xe^{-\frac{x}{2}} \Big|_{x=2} = 20e^{-1}$.

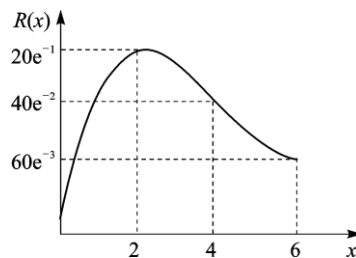
于是当产量为 2 时, 收益取最大值 $20e^{-1}$, 而相应的价格为 $10e^{-1}$. ,,, 6 分

(3) 由上面的计算结果, 易得下表

x	$[0, 2]$	2	$[2, 4]$	4	$[4, 6]$
R'	+	0	-		-
R''	-	-	-	0	+
R	单增, 凸	极大值 $\frac{20}{e}$	单减, 凸	$(4, \frac{40}{e^2})$	单减, 凹

,,, 9 分

收益函数的图形为



五、(本题满分 9 分)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x & \text{若 } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{若 } 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 试计算下列各题:

(1) $S_0 = \int_0^2 f(x)e^{-x} dx$, (4 分); **(2)** $S_1 = \int_2^4 f(x-2)e^{-x} dx$, (2 分);

(3) $S_n = \int_{2n}^{2n+2} f(x-2n)e^{-x} dx$ ($n=2,3,\dots$) (1 分); **(4)** $S = \sum_{n=0}^{\infty} S_n$. (2 分)

解：(1) $S_0 = \int_0^1 xe^{-x} dx + \int_1^2 (2-x)e^{-x} dx$. ,,, 1 分

其中 $\int_0^1 x e^{-x} dx = x e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - 2e^{-1}$, ,,, 2分

$\int_1^2 (2-x) e^{-x} dx = -(2-x) e^{-x} \Big|_1^2 - \int_1^2 e^{-x} dx = e^{-2}$. ,,, 3分

从而 $S_0 = 1 - 2e^{-1} + e^{-2} = (1 - e^{-1})^2$. ,,, 4分

(2) 令 $t = x - 2$, 则 $S_1 = \int_2^4 f(x-2) e^{-x} dx = \int_0^2 f(t) e^{-t-2} dt = S_0 e^{-2}$. ,,, 6分

(3) 令 $t = x - 2n$, 则 $S_n = \int_0^2 f(t) e^{-t-2n} dt = S_0 e^{-2n}$. ,,, 7分

(4) $S = \sum_{n=0}^{\infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} S_0 e^{-2n} = S_0 \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-2})^n$,,, 8分
 $= \frac{S_0}{1 - e^{-2}} = \frac{e-1}{e+1}$. ,,, 9分

六、(本题满分6分)

假设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f'(x) \leq 0$, 记

$$F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt, \text{ 证明在 } (a, b) \text{ 内 } F'(x) \leq 0.$$

证: 由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 因此

$$F'(x) = \frac{1}{x-a} f(x) - \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x f(t) dt = \frac{1}{x-a} \left[f(x) - \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt \right].$$
 ,,, 2分

由积分中值定理知, 存在 ξ , $a < \xi < x$, 使 $f(\xi) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt$.

因此 $F'(x) = \frac{1}{x-a} [f(x) - f(\xi)]$. ,,, 4分

又由于 $f'(x) \leq 0$, 知 $f(x)$ 在 (a, b) 上非增函数, 所以当 $x > \xi$ 时, $f(x) \leq f(\xi)$.

因 $\frac{1}{x-a} > 0$, 故由此可知 $F'(x) \leq 0$. ,,, 6分

七、(本题满分5分)

已知 $X = AX + B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X .

解: 以 E 表示 3 阶单位矩阵, 由 $X = AX + B$, 有 $(E - A)X = B$. ,,, 1分

其中 $E - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. ,,, 2分

$$\text{其逆矩阵为 } (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ -1 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}; \quad \dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{于是 } \mathbf{X} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ -1 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad \dots 5 \text{ 分}$$

八、(本题满分 6 分)

设 $\alpha_1 = (1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 3)$, $\alpha_3 = (1, 3, t)$,

(1) 问当 t 为何值时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关? (3 分)

(2) 问当 t 为何值时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关? (1 分)

(3) 当向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关时, 将 α_3 表示为 α_1 和 α_2 的线性组合. (2 分)

解: 设有实数 k_1, k_2, k_3 , 使 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 = 0$, 则得方程组:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \\ k_1 + 3k_2 + tk_3 = 0 \end{cases} \quad (*), \quad \text{其系数行列式为 } D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{vmatrix} = t - 5. \quad \dots 2 \text{ 分}$$

(1) 当 $t \neq 5$ 时, $D \neq 0$, 方程组 (*) 只有零解: $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. 这时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关. ... 3 分

(2) 当 $t = 5$ 时, $D = 0$, 方程组 (*) 有非零解, 即不存在不全为 0 的常数 k_1, k_2, k_3 , 使 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 = 0$, 这时, 向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关. ... 4 分

$$(3) \text{ 设 } t = 5. \text{ 由 } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 知方程组 } (*) \text{ 可化为 } \begin{cases} k_1 - k_3 = 0 \\ k_2 + 2k_3 = 0 \end{cases}.$$

令 $k_3 = 1$, 得 $k_1 = 1, k_2 = -2$. 因此, 有 $\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$. 从而 α_3 可以通过 α_1 和 α_2 表示为 $\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$ 6 分

九、(本题满分 5 分)

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

(1) 试求 A 矩阵的特征值. (2 分)

(2) 利用(1)小题的结果, 求矩阵 $E + A^{-1}$ 的特征值. 其中 E 是三阶单位矩阵 (3 分)

解：(1) 矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征方程为 $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda+1 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+5) = 0,$

由此得矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值 $1, 1, -5$. ,,, 2 分

(2) 由于矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值 $1, 1, -5$, 可知 $\mathbf{A}^{-1}$ 的特征值为 $1, 1, -\frac{1}{5}$. ,,, 3 分

因此, 有 $|\mathbf{E} - \mathbf{A}^{-1}| = 0$, $\left|(-\frac{1}{5})\mathbf{E} - \mathbf{A}^{-1}\right| = 0$. 由此可见 $|(1+1)\mathbf{E} - (\mathbf{E} + \mathbf{A}^{-1})| = 0$,

$|(-\frac{1}{5}+1)\mathbf{E} - (\mathbf{E} + \mathbf{A}^{-1})| = 0$, 即 $|2\mathbf{E} - (\mathbf{E} + \mathbf{A}^{-1})| = 0$, $|\frac{4}{5}\mathbf{E} - (\mathbf{E} + \mathbf{A}^{-1})| = 0$.

于是, 矩阵 $\mathbf{E} + \mathbf{A}^{-1}$ 的特征值 $2, 2, \frac{4}{5}$. ,,, 5 分

十、(本题满分 7 分)

已知随机变量 X 和 Y 的联合密度为 $f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{若 } 0 < x < \infty, 0 < y < +\infty, \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$,

试求: (1) $P\{X < Y\}$ (5 分); (2) $E(XY)$ (2 分)

解：(1) $P\{X < Y\} = \iint_{X < Y} f(x, y) dx dy$,,, 2 分

$$= \int_0^{+\infty} \int_0^y e^{-(x+y)} dx dy = \int_0^{+\infty} e^{-y} dy \int_0^y e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-y} (1 - e^{-y}) dy = \frac{1}{2}. ,,, 5 分$$

(2) $E(XY) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} xye^{-(x+y)} dx dy = \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx \int_0^{+\infty} ye^{-y} dy = 1. ,,, 7 分$

十一、(本题满分 8 分)

设随机变量在 $[2, 5]$ 上服从均匀分布. 现在对 X 进行三次独立观测. 试求至少有两次观测值大于 3 的概率.

解：以 A 表示事件“对 X 的观测值大于 3”，即 $A = \{X > 3\}$ ，由条件知， X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{若 } 2 \leq x \leq 5, \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, $P(A) = P\{X > 3\} = \int_3^5 \frac{1}{3} dx = \frac{2}{3}$. ,,, 4 分

以 u_3 表示三次观测值大于 3 的次数（即在三次独立观测中事件 A 出现的次数）.

显然, u_3 服从参数为 $n=3$, $p=\frac{2}{3}$ 的二项分布,

因此, 所求概率为 $P\{u_3 \geq 2\} = C_3^2 (\frac{2}{3})^2 \frac{1}{3} + C_3^3 (\frac{2}{3})^3 = \frac{20}{27}$. ,,, 8 分