

1989 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题(每小题 3 分, 满分 21 分.)

(1) 【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】这是个 $0 \cdot \infty$ 型未定式, 可将其等价变换成 $\frac{0}{0}$ 型, 从而利用洛必达法则进行求解.

$$\begin{aligned} \text{方法一: } \lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x &= \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 2x} \cdot \cos 2x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 2x} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos 2x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{方法二: } \lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x &= \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【相关知识点】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ 是两个重要极限中的一个, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(2) 【答案】 π

【解析】利用分部积分法和牛顿-莱布尼茨公式来求解,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} t \sin t dt &= \int_0^{\pi} t d(-\cos t) \stackrel{\text{分部法}}{=} [-t \cos t]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos t) dt \\ &= \pi + 0 + [\sin t]_0^{\pi} = \pi + (0 - 0) = \pi. \end{aligned}$$

(3) 【答案】 $y = 2x$

【解析】要求平面曲线的切线, 首先应求出该切线的斜率, 即 $f'(x_0)$.

这是一个积分上限函数, 满足积分上限函数的求导法则, 即 $y' = (x-1)(x-2)$.

由 y' 在其定义域内的连续性, 可知 $y'|_{x=0} = (0-1)(0-2) = 2$.

所以, 所求切线方程为 $y - 0 = 2(x - 0)$, 即 $y = 2x$.

(4) 【答案】 $n!$

【解析】方法一: 利用函数导数的概念求解, 即

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)(x+2) \cdots (x+n) - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)(x+2) \cdots (x+n) = 1 \cdot 2 \cdots n = n!. \end{aligned}$$

方法二: 利用其导数的连续性, 由复合函数求导法则可知,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+1)(x+2) \cdots (x+n) + x \cdot 1 \cdot (x+2) \cdots (x+n) + \cdots + \\ &\quad x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1) \cdot 1, \end{aligned}$$

所以 $f'(0) = (0+1)(0+2)\cdots(0+n) + 0 + \cdots + 0 = 1 \cdot 2 \cdots n = n!$.

(5) 【答案】 $x-1$

【解析】由定积分的性质可知, $\int_0^1 f(t)dt$ 和变量没有关系, 且 $f(x)$ 是连续函数, 故

$\int_0^1 f(t)dt$ 为一常数, 为简化计算和防止混淆,

令 $\int_0^1 f(t)dt = a$, 则有恒等式 $f(x) = x + 2a$, 两边 0 到 1 积分得

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x + 2a)dx,$$

即
$$a = \int_0^1 (x + 2a)dx = \int_0^1 xdx + 2a \int_0^1 dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + 2a[x]_0^1 = \frac{1}{2} + 2a,$$

解之得 $a = -\frac{1}{2}$, 因此 $f(x) = x + 2a = x - 1$.

(6) 【答案】 $a = b$

【解析】如果函数在 x_0 处连续, 则函数在该点处的左右极限与该点处函数值必然相等,

由函数连续性可知 $f_-(0) = f(0) = a + b \cdot 0 = a$.

而
$$f_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin bx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin bx}{bx} \cdot b = b \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin bx}{bx} = b,$$

如果 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 必有 $f_-(0) = f_+(0)$, 即 $a = b$.

(7) 【答案】 $\frac{dx}{(x+y)^2}$

【解析】这是个隐函数, 按照隐函数求导法, 两边微分得 $\sec^2 y \cdot dy = dx + dy$,

所以
$$dy = \frac{dx}{\sec^2 y + 1} = \frac{dx}{\tan^2 y} = \frac{dx}{(x+y)^2}, (x+y \neq 0).$$

二、计算题(每小题 4 分, 满分 20 分.)

(1) 【解析】令 $u = e^{-\sqrt{x}}$, $v = -\sqrt{x}$, 则 $y = \arcsin e^{-\sqrt{x}} = \arcsin u$, 由复合函数求导法则,

$$y' = (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot e^v \cdot v' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot e^v \cdot \frac{-1}{2\sqrt{x}},$$

即
$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2\sqrt{x}}}} \cdot e^{-\sqrt{x}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{x}}.$$

【相关知识点】复合函数求导法则： $y = \varphi(f(x))$ 的导数 $y' = \varphi'(f(x))f'(x)$.

(2) 【解析】利用不定积分的换元积分法， $\int \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} + C$.

(3) 【解析】可将函数转化称为熟悉的形式来求其极限，

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (2 \sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (2 \sin x + \cos x - 1)]^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (2 \sin x + \cos x - 1)]^{\frac{1}{2 \sin x + \cos x - 1} \cdot \frac{2 \sin x + \cos x - 1}{x}}, \end{aligned}$$

令 $2 \sin x + \cos x - 1 = t$ ，则当 $x \rightarrow 0$ 时， $t \rightarrow 0$ ，

则 $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + (2 \sin x + \cos x - 1)]^{\frac{1}{2 \sin x + \cos x - 1}} = \lim_{t \rightarrow 0} [1 + t]^{\frac{1}{t}}$ ，

这是个比较熟悉的极限，即 $\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e$.

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} (2 \sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x + \cos x - 1}{x}}$ ，

而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x + \cos x - 1}{x} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - \sin x}{1} = 2$ ，

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} (2 \sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x + \cos x - 1}{x}} = e^2$.

(4) 【解析】这是个函数的参数方程，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1}{2t},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2t} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2t} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2t} \right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2}{(2t)^2} \cdot \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} = -\frac{1+t^2}{4t^3}.$$

【相关知识点】参数方程所确定函数的微分法：如果 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases}$ ，则 $\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(t)}{\phi'(t)}$.

(5) 【解析】利用定积分的分部积分法求解定积分，

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 f''(2x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 df'(2x) \stackrel{\text{分部法}}{=} \frac{1}{2} [x^2 \cdot f'(2x)]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 f'(2x) dx^2 \\ &= \frac{1}{2} [1 \cdot f'(2) - 0] - \int_0^1 x f'(2x) dx \\ &= \frac{1}{2} f'(2) - \frac{1}{2} \int_0^1 x df(2x) \\ &= \frac{1}{2} f'(2) - \left[\frac{1}{2} (xf(2x)) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) dx \right] \\ &= \frac{1}{2} f'(2) - \frac{1}{2} f(2) + \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) dx, \end{aligned}$$

令 $t = 2x$, 则 $x = \frac{1}{2}t$, $dx = \frac{1}{2}dt$,

所以 $\int_0^1 f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t)dt$.

把 $f(2) = \frac{1}{2}$, $f'(2) = 0$ 及 $\int_0^2 f(x)dx = 1$ 代入上式, 得

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 f''(2x)dx &= \frac{1}{2} f'(2) - \frac{1}{2} f(2) + \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x)dx \\ &= \frac{1}{2} f'(2) - \frac{1}{2} f(2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 f(t)dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 0.\end{aligned}$$

三、选择题(每小题 3 分, 满分 18 分.)

(1) 【答案】(A)

【解析】函数 $y = x \sin \frac{1}{x}$ 只有间断点 $x = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x}$, 其中 $\sin \frac{1}{x}$ 是有界函数. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, x 为无穷小, 无穷小量和一个有界函数的乘积仍然是无穷小, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

故函数没有铅直渐近线.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \quad t = \frac{1}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

所以 $y = 1$ 为函数的水平渐近线, 所以答案为 (A).

【相关知识点】铅直渐近线: 如函数 $y = f(x)$ 在其间断点 $x = x_0$ 处有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则

$x = x_0$ 是函数的一条铅直渐近线;

水平渐近线: 当 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ (a 为常数), 则 $y = a$ 为函数的水平渐近线.

(2) 【答案】(B)

【解析】判定方程 $f(x) = 0$ 实根的个数, 其实就是判定函数 $y = f(x)$ 与 x 有几个交点, 即对函数图形的描绘的简单应用,

令 $f(x) = x^5 + 2ax^3 + 3bx + 4c$,

则 $f'(x) = 5x^4 + 6ax^2 + 3b$.

令 $t = x^2$, 则 $f'(x) = 5x^4 + 6ax^2 + 3b = 5t^2 + 6at + 3b = f'(t)$,

其判别式 $\Delta = (6a)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3b = 12(3a^2 - 5b) < 0$,

所以 $f'(t) = 5t^2 + 6at + 3b$ 无实根, 即 $f'(t) > 0$.

所以 $f(x) = x^5 + 2ax^3 + 3bx + 4c$ 在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 是严格的单调递增函数.

又 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 + 2ax^3 + 3bx + 4c) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 + 2ax^3 + 3bx + 4c) = +\infty$

所以利用连续函数的介值定理可知, 在 $(-\infty, +\infty)$ 内至少存在一点 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ 使得

$f(x_0) = 0$, 又因为 $y = f(x)$ 是严格的单调函数, 故 x_0 是唯一的.

故 $f(x) = 0$ 有唯一实根, 应选 (B).

(3) 【答案】(C)

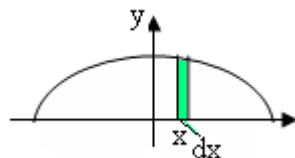
【解析】如图 $y = \cos x (-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ 的图像, 则当 $y = \cos x$ 绕 x 轴旋转一周, 在 x 处取

微增 dx , 则微柱体的体积 $dV = \pi \cos^2 x dx$, 所以体积 V 有

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi \cos^2 x dx$$

$$= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x + 1}{2} dx = \frac{\pi}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x d2x + \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx$$

$$= \frac{\pi}{4} [-\sin 2x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2} [x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0 + \frac{\pi}{2} (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{2}.$$



因此选 (C).

(4) 【答案】(D)

【解析】题中给出的条件中, 除了一处极值点外均未指明函数其它性质, 为了判定的方便, 可以举出反例而排除.

若取 $f(x) = g(x) = -(x-a)^2$, 两者都在 $x = a$ 处取得极大值 0, 而

$F(x) = f(x)g(x) = (x-a)^4$ 在 $x = a$ 处取得极小值, 所以 (A)、(C) 都不正确.

若取 $f(x) = g(x) = 1 - (x-a)^2$, 两者都在 $x = a$ 处取得极大值 1, 而

$F(x) = f(x)g(x) = [1 - (x-a)^2]^2$ 在 $x = a$ 处取得极大值 1, 所以 (B) 也不正确, 从而选 (D).

(5) 【答案】(B)

【解析】微分方程 $y'' - y = e^x + 1$ 所对应的齐次微分方程的特征方程为 $r^2 - 1 = 0$, 它的两个根是 $r_1 = 1, r_2 = -1$.

而形如 $y'' - y = e^x$ 必有特解 $Y_1 = x \cdot ae^x$; $y'' - y = 1$ 必有特解 $Y_1 = b$.

由叠加得原方程必有特解 $Y = x \cdot ae^x + b$, 应选(B).

(6) 【答案】(D)

【解析】利用导数的概念判定 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导的充分条件.

(A) 等价于 $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}$ 存在, 所以只能保证函数在 $x = a$ 右导数存在;

(B)、(C) 显然是 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导的必要条件, 而非充分条件,

如 $y = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处不连续, 因而不可导, 但是

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(0 + \frac{1}{h}) - \cos(0 - \frac{1}{h})}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{1}{h} - \cos \frac{1}{h}}{2h} = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{1}{2h}) - \cos(0 - \frac{1}{2h})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{1}{2h} - \cos \frac{1}{2h}}{h} = 0 \text{ 均存在;}$$

(D) 是充分的:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \stackrel{\Delta x = -h}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h} \text{ 存在} \Rightarrow f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h} \text{ 存在,}$$

应选(D).

四、(本题满分6分)

【解析】所给方程为一阶线性非齐次微分方程, 先写成标准形式

$$y' + (\frac{1}{x} - 1)y = \frac{1}{x}e^{2x},$$

$$\text{通解为 } y = e^{-\int(\frac{1}{x}-1)dx} \left(\int \frac{1}{x} e^{2x} e^{\int(\frac{1}{x}-1)dx} dx + C \right) = \frac{1}{x} e^x \left(\int \frac{1}{x} e^{2x} \frac{x}{e^x} dx + C \right) = \frac{e^x}{x} (e^x + C).$$

代入初始条件 $y(1) = 0$, 得 $C = -e$, 所求解为 $y = \frac{e^x}{x} (e^x - e)$.

【相关知识点】一阶线性非齐次微分方程的标准形式为 $y' + p(x)y = q(x)$, 其通解公式为

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right), \text{ 其中 } C \text{ 为常数.}$$

五、(本题满分 7 分)

【解析】先将原式进行等价变换, 再求导, 试着发现其中的规律,

$$f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt = \sin x - x \int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t)dt,$$

所给方程是含有未知函数及其积分的方程, 两边求导, 得

$$f'(x) = \cos x - \int_0^x f(t)dt - xf(x) + xf(x) = \cos x - \int_0^x f(t)dt,$$

再求导, 得

$$f''(x) = -\sin x - f(x), \text{ 即 } f''(x) + f(x) = -\sin x,$$

这是个简单的二阶常系数非齐次线性微分方程, 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2 + 1 = 0$,

此特征方程的根为 $r = \pm i$, 而右边的 $\sin x$ 可看作 $e^{\alpha x} \sin \beta x$, $\alpha = 0, \beta = 1, \alpha \pm i\beta = \pm i$ 为特

征根, 因此非齐次方程有特解 $Y = xa \sin x + xb \cos x$.

代入方程并比较系数, 得 $a = 0, b = \frac{1}{2}$, 故 $Y = \frac{x}{2} \cos x$, 所以

$$f(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{x}{2} \cos x.$$

又因为 $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 所以 $c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{2}$, 即 $f(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{x}{2} \cos x$.

六、(本题满分 7 分)

【解析】方法一: 判定方程 $f(x) = 0$ 等价于判定函数 $y = f(x)$ 与 x 的交点个数.

$$\text{令 } f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + \int_0^\pi \sqrt{1 - \cos 2x} dx,$$

其中 $\int_0^\pi \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ 是定积分, 为常数, 且被积函数 $1 - \cos 2x$ 在 $(0, \pi)$ 非负, 故

$$\int_0^\pi \sqrt{1 - \cos 2x} dx > 0, \text{ 为简化计算, 令 } \int_0^\pi \sqrt{1 - \cos 2x} dx = k > 0, \text{ 即 } f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k,$$

则其导数 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$, 令 $f'(x) = 0$ 解得唯一驻点 $x = e$,

$$\text{即 } \begin{cases} f'(x) > 0, 0 < x < e \\ f'(x) < 0, e < x < +\infty \end{cases},$$

所以, $x = e$ 是最大点, 最大值为 $f(e) = \ln e - \frac{e}{e} + k = k > 0$.

$$\text{又因为} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - \frac{x}{e} + k) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - \frac{x}{e} + k) = -\infty \end{cases},$$

由连续函数的介值定理知在 $(0, e)$ 与 $(e, +\infty)$ 各有且仅有一个零点(不相同),

故方程 $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^\pi \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ 在 $(0, +\infty)$ 有且仅有两个不同实根.

方法二: $\int_0^\pi \sqrt{1 - \cos 2x} dx = \int_0^\pi \sqrt{\sin^2 x} dx$, 因为当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, $\sin x \geq 0$, 所以

$$\int_0^\pi \sqrt{2 \sin^2 x} dx = \sqrt{2} \int_0^\pi \sin x dx = \sqrt{2} [-\cos x]_0^\pi = 2\sqrt{2} > 0.$$

其它同方法一.

七、(本大题满分 11 分)

【解析】函数 $y = \frac{x+1}{x^2}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 将函数化简为 $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$,

$$\text{则} \quad y' = -\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \left(-\frac{2}{x} - 1\right), y'' = \frac{6}{x^4} + \frac{2}{x^3} = \frac{1}{x^3} \left(\frac{6}{x} + 2\right).$$

令 $y' = 0$, 得 $x = -2$, 即

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x^2} \left(-\frac{2}{x} - 1\right) > 0, x \in (-2, 0), \\ y' = \frac{1}{x^2} \left(-\frac{2}{x} - 1\right) < 0, x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty), \end{cases} \quad \text{故 } x = -2 \text{ 为极小值点.}$$

令 $y'' = 0$, 得 $x = -3$, 即

$$\begin{cases} y'' = \frac{1}{x^3} \left(\frac{6}{x} + 2\right) > 0, x \in (-3, 0) \cup (0, +\infty), \text{为凹}, \\ y'' = \frac{1}{x^3} \left(\frac{6}{x} + 2\right) < 0, x \in (-\infty, -3), \text{为凸}, \end{cases}$$

y'' 在 $x = -3$ 处左右变号, 所以 $x = -3, y(-3) = -\frac{2}{9}$ 为函数的拐点.

又 $\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = \infty$, 故 $x = 0$ 是函数的铅直渐近线;

$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0$, 故 $y = 0$ 是函数的水平渐近线.

填写表格如下:

单调减少区间	$(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
--------	-----------------------------------

单调增加区间	$(-2, 0)$
极值点	$x = -2$
极值	$y = -\frac{1}{4}$
凹区间	$(-3, 0) \cup (0, +\infty)$
凸区间	$(-\infty, -3)$
拐点	$(-3, -\frac{2}{9})$
渐近线	$x = 0, y = 0$

八、(本题满分 10 分)

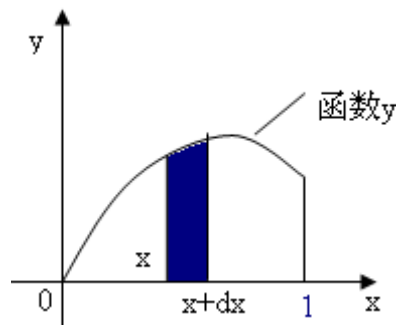
【解析】由题知曲线过点 $(0, 0)$, 得 $c = 0$, 即 $y = ax^2 + bx$.

如图所示, 从 $x \rightarrow x + dx$ 的面积 $dS = ydx$, 所以

$$S = \int_0^1 y dx = \int_0^1 (ax^2 + bx) dx = \left[\frac{1}{3} ax^3 + \frac{1}{2} bx^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{a}{3} + \frac{b}{2},$$

由题知 $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{1}{3}$, 即 $b = \frac{2-2a}{3}$.



当 $y = ax^2 + bx$ 绕 x 轴旋转一周, 则从 $x \rightarrow x + dx$ 的体积 $dV = \pi y^2 dx$, 所以

旋转体积

$$V = \int_0^1 \pi y^2 dx = \pi \int_0^1 (ax^2 + bx)^2 dx = \pi \left[\frac{a^2 x^5}{5} + \frac{abx^4}{2} + \frac{b^2 x^3}{3} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{a^2}{5} + \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{3} \right),$$

b 用 a 代入消去 b , 得 $V = \pi \left[\frac{a^2}{5} + \frac{4(1-a)^2}{27} + \frac{a(1-a)}{3} \right]$, 这是个含有 a 的函数, 两边对 a 求

导得

$$\frac{dV}{da} = \frac{\pi}{27} \left(\frac{4}{5} a + 1 \right),$$

令其等于 0 得唯一驻点 $a = -\frac{5}{4}$, $\frac{dV}{da}$ 在该处由负变正, 此点为极小值点, 故体积最小,

这时 $b = \frac{3}{2}$, 故所求函数 $y = ax^2 + bx + c = -\frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{2}x$.