

1990 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题解析

一、填空题(本题满分 15 分, 每小题 3 分.)

(1) 【答案】 2

【解析】 对原式进行分子有理化, 分子分母同乘以有理化因子 $\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}$.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}}{1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) \cdot (\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3\sqrt{n} - n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}},\end{aligned}$$

再分子分母同时除以 $\sqrt{n}$, 有

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}} + \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}.$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{n}} = 0$, 其中 a 为常数, 所以原式 $= \frac{4}{1+1} = 2$.

(2) 【答案】 $b+a$

【解析】 由于 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 故 $A = F(0) = \lim_{x \rightarrow 0} F(x)$.

$\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$ 为 “ $\frac{0}{0}$ ” 型的极限未定式, 又 $f(x)$ 在点 0 处导数存在, 所以

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + a \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + a \cos x}{1} = b + a.$$

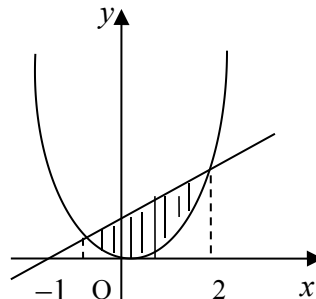
【相关知识点】 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续: 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义,

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

(3) 【答案】 $4\frac{1}{2}$

【解析】 先解出两条曲线在平面的交点, 即令 $x^2 = x+2$, 解得 $x = -1$ 和 $x = 2$, 故所围成的平面图形如右图所示:

$$\begin{aligned}\text{所求面积为} \quad S &= \int_{-1}^2 (x+2-x^2) dx \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-1}^2 = 4\frac{1}{2}.\end{aligned}$$



(4) 【答案】 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$

【解析】由于方程组有解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A})$, 对 $\bar{A}$ 作初等行变换,

第一行乘以 (-1) 加到第四行上, 有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & a_1 + a_4 \end{bmatrix},$$

第二行加到第四行上, 再第三行乘以 (-1) 加到第四行上, 有

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_1 + a_2 + a_4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ & & 1 & 1 & -a_3 \\ & & & 0 & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{bmatrix}.$$

为使 $r(A) = r(\bar{A})$, 常数 a_1, a_2, a_3, a_4 应满足条件: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$.

【相关知识点】非齐次线性方程组有解的判定定理:

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 线性方程组 $Ax = b$ 有解的充分必要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵 $\bar{A} = (A:b)$ 的秩, 即是 $r(A) = r(\bar{A})$ (或者说, b 可由 A 的列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线表出, 亦等同于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, b$ 是等价向量组).

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 线性方程组 $Ax = b$, 则

(1) 有唯一解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) = n$.

(2) 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < n$.

(3) 无解 $\Leftrightarrow r(A) + 1 = r(\bar{A})$. $\Leftrightarrow b$ 不能由 A 的列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线表出.

(5) 【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】这是一个四重伯努利试验概率模型, 设试验的成功率即射手的命中率为 p , 则进行四次独立的射击, 设事件 Y 为“射手命中目标的次数”, Y 服从参数 $n=4, p=\frac{80}{81}$ 的二项分布, 由二项分布的概率公式, 事件“四次均不中”的概率为 $(1-p)^4$, 它是至少命中一次的对立事件. 依题意

$$(1-p)^4 = 1 - \frac{80}{81} \Rightarrow 1-p = \frac{1}{3} \Rightarrow p = \frac{2}{3}.$$

本题的另一种分析方法是用随机变量 X 表示独立地进行射击中命中目标的次数, p 表示一次射击的命中率, 则 $X \sim B(4, p)$, 依题意

$$P\{X=0\}=1-\sum_{k=1}^4 P\{X=k\}=\frac{1}{81},$$

$$\text{即 } (1-p)^4 = \frac{1}{81} \Rightarrow p = \frac{2}{3}.$$

【相关知识点】二项分布的概率公式:

若 $Y \sim B(n, p)$, 则 $P\{Y=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k=0, 1, \dots, n$.

二、选择题(本题满分 15 分, 每小题 3 分.)

(1) 【答案】(B)

【解析】由于 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x \cdot e^{\sin x} = \frac{\pi}{2} \cdot e$, 而 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$, 所以,

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x \cdot \tan x \cdot e^{\sin x} = +\infty$, 故 $f(x)$ 无界.

或考察 $f(x)$ 在 $x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$ ($n=1, 2, \dots$) 的函数值, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = +\infty$, 可见

$f(x)$ 是无界函数. 应选 (B).

以下证明其他结论均不正确.

由 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} e^{\sin \frac{\pi}{4}} \neq f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} e^{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$, 知 (A) 不正确;

由 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0, f\left(-\frac{\pi}{4}\right) > 0$, 而 $f(0) = 0$, 知 (D) 不正确.

证明 (C) 不正确可用反证法.

设 $g(x) = \tan x \cdot e^{\sin x}$, 于是 $g(x)$ 的定义域为 $D = \left\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right\}$,

且 $g(x)$ 的全部零点为 $x_n = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 若 $f(x) = xg(x)$ 以 T ($T > 0$) 为周期, 则有

$$(x+T)g(x+T) = xg(x), \forall x \in D.$$

令 $x=0$, 有 $Tg(T)=0$, 即 $g(T)=0$. 从而 $T=k\pi$, 其中 k 为某一正数. 于是 $2k\pi$ 也是

$xg(x)$ 的周期. 代入即得, 对 $\forall x \in D$ 有

$$(x+2k\pi)g(x+2k\pi) = (x+2k\pi)g(x) = xg(x).$$

这表明 $2k\pi g(x) \equiv 0$ 在 $x \in D$ 上成立, 于是 $g(x) \equiv 0$ 在 $x \in D$ 上成立, 导致了矛盾. 故

$f(x) = xg(x)$ 不可能是周期函数.

【相关知识点】 极限的四则运算法则:

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = AB$.

(2) **【答案】** (D)

【解析】 通过变量代换 $t = x + 1$ 或按定义由关系式 $f(1+x) = af(x)$ 将 $f(x)$ 在 $x=1$ 的可导性与 $f(x)$ 在 $x=0$ 的可导性联系起来.

令 $t = x + 1$, 则 $f(t) = af(t-1)$. 由复合函数可导性及求导法则, 知 $f(t)$ 在 $t=1$ 可导, 且

$$f'(t)|_{t=1} = af'(t-1)(t-1)'|_{t=1} = af'(0) = ab,$$

因此, 应选 (D).

【相关知识点】 复合函数求导法则: 如果 $u = g(x)$ 在点 x 可导, 而 $y = f(x)$ 在点 $u = g(x)$ 可

导, 则复合函数 $y = f[g(x)]$ 在点 x 可导, 且其导数为

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

(3) **【答案】** (C)

【解析】 本题考查线性无关的概念与理论, 以及充分必要性条件的概念.

(A) (B) (D) 均是必要条件, 并非充分条件. 也就是说, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 可以推导出 (A) (B) (D) 选项, 但是不能由 (A) (B) (D) 选项中的任意一个推导出向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

例如: $(1,0), (0,1), (1,1)$ 显然有 $(1,0) + (0,1) - (1,1) = (0,0)$, 该向量组线性相关. 但 (A) (B) (D) 均成立.

根据 “ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关的充分必要条件是存在某 $\alpha_i (i=1, 2, \dots, s)$ 可以由 $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_s$ 线性表出.” 或由 “ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是任意一个 $\alpha_i (i=1, 2, \dots, s)$ 均不能由 $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_s$ 线性表出.” 故选 (C).

(4) **【答案】** A

【解析】 由于 $B \subset A$, 所以 $A+B=A$, 于是有 $P(A+B)=P(A)$. 故本题选 A.

对于 B 选项, 因为 $B \subset A$, 所以事件 B 发生, 则事件 A 必然发生, 所以 $P(AB)=P(B)$, 而不是 $P(AB)=P(A)$, 故 B 错.

对于 C 选项, 因为 $B \subset A$, 由条件概率公式 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, 当 B, A 是相互独立的事件时, 才会有 $P(B|A) = P(B)$; 所以 C 错.

对于 D 选项, 因为 $B \subset A$, 所以事件 B 发生事件 A 不发生是个不可能事件, 故 $P(B - A) = 0$, 所以 (D) 错.

(5) 【答案】(C)

【解析】由离散型随机变量概率的定义, 有

$$\begin{aligned} P\{X=Y\} &= P\{X=-1, Y=-1\} + P\{X=1, Y=1\} \\ &= P\{X=-1\} \cdot P\{Y=-1\} + P\{X=1\} \cdot P\{Y=1\} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

故本题选 (C). 而 (B)、(D) 选项是错误的.

对于 (A) 选项, 题目中只说了随机变量 X 和 Y 相互独立, 且他们的概率分布相同, 但是二者是不同事件, 并不能说事件 X 与事件 Y 是同一事件. 故 (A) 错.

三、计算题(本题满分 20 分, 每小题 5 分.)

(1) 【解析】在 $x \in [e, e^2]$ 上, $I'(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{\ln x}{(x-1)^2} > 0$, 故函数 $I(x)$ 在 $[e, e^2]$ 上单调增加, 最大值为 $I(e^2)$.

由 $\frac{dx}{(1-x)^2} = \frac{-d(1-x)}{(1-x)^2} = d \frac{1}{(1-x)}$, 有

$$\begin{aligned} I(e^2) &= \int_e^{e^2} \frac{\ln t}{(t-1)^2} dt = - \int_e^{e^2} \ln t d \left(\frac{1}{t-1} \right) \\ &= - \left. \frac{\ln t}{t-1} \right|_e^{e^2} + \int_e^{e^2} \frac{dt}{t(t-1)} = - \left. \frac{\ln t}{t-1} \right|_e^{e^2} + \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt \\ &= - \frac{2}{e^2-1} + \frac{1}{e-1} + \ln(e^2-1) - 2 - [\ln(e-1) - 1] \\ &= \frac{1}{e+1} + \ln \frac{e+1}{e}. \end{aligned}$$

【相关知识点】1. 对积分上限的函数的求导公式:

若 $F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x) dx$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 均一阶可导, 则

$$F'(t) = \beta'(t) \cdot f[\beta(t)] - \alpha'(t) \cdot f[\alpha(t)].$$

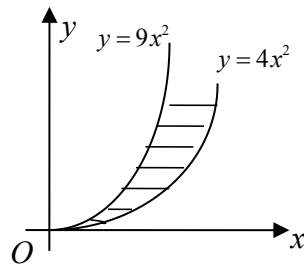
2. 假定 $u = u(x)$ 与 $v = v(x)$ 均具有连续的导函数, 则

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx, \text{ 或者 } \int u dv = uv - \int v du.$$

(2) 【解析】区域 D 是无界函数, 设

$$D_b = D \cap \{0 \leq y \leq b\} = \{(x, y) | 0 \leq y \leq b, \frac{\sqrt{y}}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{y}}{2}\},$$

不难发现, 当 $b \rightarrow +\infty$ 时有 $D_b \rightarrow D$, 从而



$$\begin{aligned} \iint_D x e^{-y^2} dx dy &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \iint_{D_b} x e^{-y^2} dx dy = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-y^2} dy \int_{\frac{\sqrt{y}}{3}}^{\frac{\sqrt{y}}{2}} x dx \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \left(\frac{1}{4}y - \frac{1}{9}y\right) e^{-y^2} dy \\ &= \frac{5}{72} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b y e^{-y^2} dy \stackrel{t=y^2}{=} \frac{5}{144} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^{b^2} e^{-t} dt \\ &= \frac{5}{144} \lim_{b \rightarrow +\infty} (1 - e^{-b^2}) = \frac{5}{144}. \end{aligned}$$

(3) 【解析】因系数 $a_n = \frac{1}{n^2} (n=1, 2, \dots)$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1,$$

这样, 幂级数的收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 1$. 因此当 $-1 < x-3 < 1$, 即 $2 < x < 4$ 时级数绝对收敛.

当 $x=2$ 时, 得交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$; 当 $x=4$ 时, 得正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, 二者都收敛, 于是原级

数的收敛域为 $[2, 4]$.

【相关知识点】1. 求收敛半径的方法: 如果 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, 其中 a_n, a_{n+1} 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的

相邻两项的系数, 则这幂级数的收敛半径

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & 0 \leq \rho \leq +\infty, \\ +\infty, & \rho = 0, \\ 0, & \rho = +\infty. \end{cases}$$

2. 交错级数的莱布尼茨判别法: 设交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 满足:

$$(1) u_n \geq u_{n+1}, n=1, 2, \dots; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛, 且其和满足 $0 < \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n < u_1$, 余项 $|r_n| < u_{n+1}$.

3. p 级数: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛; 当 $p \leq 1$ 时发散.

(4) 【解析】方法 1: 所给方程为一阶线性微分方程, 可直接利用通解公式求解.

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \cos x dx} \left[\int e^{\int \cos x dx} \ln x e^{\int \cos x dx} dx + C \right] \\ &= e^{-\sin x} \left[\int \ln x dx + C \right] = e^{-\sin x} [x \ln x - x + C]. \end{aligned}$$

方法 2: 用函数 $e^{\int P(x) dx} = e^{\int \cos x dx} = e^{\sin x}$ 同乘方程两端, 构造成全微分方程.

方程两端同乘 $e^{\sin x}$, 得 $e^{\sin x} y' + y e^{\sin x} \cos x = (y e^{\sin x})' \Rightarrow (y e^{\sin x})' = \ln x$, 再积分一次得

$$y e^{\sin x} = C + \int \ln x dx = C + x \ln x - x.$$

最后, 再用 $e^{-\sin x}$ 同乘上式两端即得通解 $y = e^{-\sin x} [x \ln x - x + C]$.

【相关知识点】一阶线性非齐次方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的通解为

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right), \quad \text{其中 } C \text{ 为任意常数.}$$

四、(本题满分 9 分)

【解析】(1) 利润为销售收入减去成本, 所以利润函数为

$$\begin{aligned} \pi &= 15 + 14x_1 + 32x_2 - 8x_1x_2 - 2x_1^2 - 10x_2^2 - (x_1 + x_2) \\ &= 15 + 13x_1 + 31x_2 - 8x_1x_2 - 2x_1^2 - 10x_2^2. \end{aligned}$$

由多元函数极值点的必要条件, 有

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial x_1} = -4x_1 - 8x_2 + 13 = 0, \\ \frac{\partial \pi}{\partial x_2} = -8x_1 - 20x_2 + 31 = 0, \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0.75, x_2 = 1.25.$$

因驻点惟一, 且实际问题必有最大值, 故投入电台广告费用 0.75 万元, 报纸广告费用 1.25 万

元可获最大利润.

(2) 若广告费用为 1.5 万元, 则应当求利润函数 (与 (1) 中解析式相同)

$$\pi = 15 + 13x_1 + 31x_2 - 8x_1x_2 - 2x_1^2 - 10x_2^2,$$

在 $x_1 + x_2 = 1.5$ 时的条件最大值. 拉格朗日函数为

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 15 + 13x_1 + 31x_2 - 8x_1x_2 - 2x_1^2 - 10x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 1.5),$$

由

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = -4x_1 - 8x_2 + 13 + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -8x_1 - 20x_2 + 31 + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 1.5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1.5.$$

因驻点惟一, 且实际问题必有最大值, 故应将广告费 1.5 万元全部用于报纸广告, 可使利润最大.

【相关知识点】拉格朗日乘数法:

要找函数 $z = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的可能极值点, 可以先作拉格朗日函数

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

其中 λ 为参数. 求其对 x 与 y 的一阶偏导数, 并使之为零, 然后与附加条件联立起来:

$$\begin{cases} f_x(x, y) + \lambda\varphi_x(x, y) = 0, \\ f_y(x, y) + \lambda\varphi_y(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

由这方程组解出 x, y 及 λ , 这样得到的 (x, y) 就是函数 $f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的可能极值点.

五、(本题满分 6 分)

【解析】方法 1: 当 $a = 0$ 时, $f(a+b) = f(b) = f(a) + f(b)$, 即不等式成立;

若 $a > 0$, 因为

$$\begin{aligned} & f(a+b) - f(a) - f(b) + f(0) \\ &= [f(a+b) - f(b)] - [f(a) - f(0)] \\ &= f'(\xi_2)a - f'(\xi_1)a = a[f'(\xi_2) - f'(\xi_1)], \end{aligned}$$

其中 $0 < \xi_1 < a \leq b < \xi_2 < a+b$. 又 $f'(x)$ 单调减少, 故 $f'(\xi_2) \leq f'(\xi_1)$. 从而有

$$f(a+b)-f(a)-f(b)+f(0) \leq 0, \text{ 即 } f(a+b) \leq f(a)+f(b).$$

方法 2: 构造辅助函数, 将式子移到不等式右边, 再将 b 视为变量 x , 得辅助函数

令 $F(x) = f(x) + f(a) - f(a+x)$, $x \in [0, b]$, 由于 $f(0) = 0$, 所以 $F(0) = 0$, 又因为

$F'(x) = f'(x) - f'(a+x)$, 且 $a \geq 0$, $f'(x)$ 在 $(0, b)$ 单调减少, 所以 $F'(x) \geq 0$, 于是 $F(x)$ 在

$[0, b]$ 上单调递增, 故 $F(b) \geq F(0) = 0$, 即

$$f(a+b) \leq f(a) + f(b), \text{ 其中 } 0 \leq a \leq b \leq a+b \leq c.$$

【相关知识点】 拉格朗日中值定理:

如果函数 $f(x)$ 满足在闭区间 $[a, b]$ 上连续; 在开区间 (a, b) 内可导, 那么在 (a, b) 内至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使等式 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ 成立.

六、(本题满分 8 分)

【解析】 本题中, 方程组有解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A})$. (相关定理见第一题(4))

对增广矩阵作初等行变换, 第一行乘以 (-3) 、 (-5) 分别加到第二、四行上, 有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & a \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & \vdots & b \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & a \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & \vdots & -3a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & \vdots & b \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & \vdots & 2-5a \end{bmatrix},$$

第二行乘以 1 、 (-1) 分别加到第三、四行上, 第二行再自乘 (-1) , 有

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & a \\ & 1 & 2 & 2 & 6 & \vdots & 3a \\ & & & & & \vdots & b-3a \\ & & & & & \vdots & 2-2a \end{bmatrix}.$$

(1) 当 $b-3a=0$ 且 $2-2a=0$, 即 $a=1, b=3$ 时方程组有解.

(2) 当 $a=1, b=3$ 时, 方程组的同解方程组是

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3, \end{cases}$$

由 $n-r(A)=5-2=3$, 即解空间的维数为 3. 取自变量为 x_3, x_4, x_5 , 则导出组的基础解系为

$$\eta_1 = (1, -2, 1, 0, 0)^T, \eta_2 = (1, -2, 0, 1, 0)^T, \eta_3 = (5, -6, 0, 0, 1)^T.$$

(3) 令 $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, 得方程组的特解为 $\alpha = (-2, 3, 0, 0, 0)^T$. 因此, 方程组的所有解是 $\alpha + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.

【相关知识点】 若 α_1, α_2 是对应齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, 则 $Ax = b$ 的通解形式为 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \xi$, 其中 η_1, η_2 是 $Ax = 0$ 的基础解系, ξ 是 $Ax = b$ 的一个特解.

七、(本题满分 5 分)

【解析】 若 A, B 是 n 阶矩阵, 且 $AB = E$, 则必有 $BA = E$. 于是按可逆的定义知 $A^{-1} = B$.

如果对特征值熟悉, 由 $A^k = 0$ 可知矩阵 A 的特征值全是 0, 从而 $E - A$ 的特征值全是 1, 也就能证明 $E - A$ 可逆.

由于 $A^k = 0$, 故

$$(E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) = E^k - A^k = E.$$

所以 $E - A$ 可逆, 且 $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$.

八、(本题满分 6 分)

【解析】 (反证法) 若 $X_1 + X_2$ 是 A 的特征向量, 它所对应的特征值为 λ , 则由定义有:

$$A(X_1 + X_2) = \lambda(X_1 + X_2).$$

由已知又有 $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$.

两式相减得 $(\lambda - \lambda_1)X_1 + (\lambda - \lambda_2)X_2 = 0$.

由 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 知 $\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2$ 不全为 0, 于是 X_1, X_2 线性相关, 这与不同特征值的特征向量线性无关相矛盾. 所以, $X_1 + X_2$ 不是 A 的特征向量.

【相关知识点】 矩阵特征值与特征向量的定义: 设 A 是 n 阶矩阵, 若存在数 λ 及非零的 n 维列向量 X 使得 $AX = \lambda X$ 成立, 则称 λ 是矩阵 A 的特征值, 称非零向量 X 是矩阵 A 的特征向量.

九、(本题满分 4 分)

【解析】 样本空间含样本点总数为 C_{10}^3 ; 即十个数字任意选三个有多少种选择方案.

有利于事件 A_1 的样本点数为 C_8^3 ; 十个数字除去 0 和 5 任意选三个有多少种选择方案.

有利于事件 A_2 的样本点数为 $2C_9^3 - C_8^3$; 十个数字除去 0 任意选三个的选择方案和十个数字除去 5 任意选三个的选择方案再减去中间多算了一次的方法数, 即是事件 A_1 被加了两次, 所以应该减去 C_8^3 .

由古典概率公式,

$$P(A_1) = \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}; P(A_2) = \frac{2C_9^3 - C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{14}{15}.$$

【相关知识点】 古典概率公式: $P(A_i) = \frac{\text{有利于事件 } A_i \text{ 的样本点数}}{\text{样本空间的总数}}.$

十、(本题满分 5 分)

【解析】 (1) 由连续型随机变量边缘分布的定义, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-ax} = 0$, (a 为常数) 有

X 和 Y 的边缘分布函数分别为

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-0.5x}, & \text{若 } x \geq 0, \\ 0, & \text{若 } x < 0; \end{cases}$$

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-0.5y}, & \text{若 } y \geq 0, \\ 0, & \text{若 } y < 0. \end{cases}$$

由于对任意实数 x, y 都满足 $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$. 因此 X 和 Y 相互独立.

(2) 因为 X 和 Y 相互独立, 所以有

$$\begin{aligned} \alpha &= P\{X > 0.1, Y > 0.1\} = P\{X > 0.1\} \cdot P\{Y > 0.1\} \\ &= [1 - F_X(0.1)][1 - F_Y(0.1)] = e^{-0.05} \cdot e^{-0.05} = e^{-0.1}. \end{aligned}$$

十一、(本题满分 7 分)

【解析】 若已知正态分布的期望和方差, 在计算有关概率时可将其转化为标准正态分布的有关概率, 通过 $\Phi(x)$ 表计算. 但是正态分布的参数 μ 与 σ^2 未知时, 则应先根据题设条件求出 μ 与 σ^2 的值, 再去计算有关事件的概率.

设 X 为考生的外语成绩, 依题意有 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且 $\mu = 72$, 但 σ^2 未知. 所以可标准化得 $\frac{X - 72}{\sigma} \sim N(0, 1)$. 由标准正态分布函数概率的计算公式, 有

$$P\{X > 96\} = 1 - P\{X \leq 96\} = 1 - \Phi\left(\frac{96 - 72}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right) = 0.023,$$

$$\Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right) = 1 - 0.023 = 0.977.$$

查表可得 $\frac{24}{\sigma} = 2, \sigma = 12$, 即 $X \sim N(72, 12^2)$,

$$P\{60 \leq X \leq 84\} = P\left\{\left|\frac{X-72}{12}\right| \leq 1\right\} = 2\Phi(1) - 1 = 0.682.$$