

1992 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题解析

一、填空题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

- (1) 设商品的需求函数为 $Q=100-5P$, 其中 Q, P 分别表示为需求量和价格, 如果商品需求弹性的绝对值大于 1, 则商品价格的取值范围是_____.

(1) 【答案】 $(10, 20]$

【解析】 根据 $Q(P)=100-5P \geq 0$, 得价格 $P \leq 20$, 又由 $Q=100-5P$ 得 $Q'(P)=-5$, 按照经济学需求弹性的定义, 有

$$\varepsilon = P \cdot \frac{Q'(P)}{Q(P)} = -\frac{5P}{100-5P},$$

$$\text{令 } |\varepsilon| = \left| \frac{5P}{100-5P} \right| = \frac{5P}{100-5P} > 1, \text{ 解得 } P > 10.$$

所以商品价格的取值范围是 $(10, 20]$.

- (2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{n4^n}$ 的收敛域为_____.

(2) 【答案】 $(0, 4)$

【解析】 因题设的幂级数是缺项幂级数, 故可直接用比值判别法讨论其收敛性.

首先当 $x-2=0$ 即 $x=2$ 时级数收敛.

当 $x \neq 2$ 时, 后项比前项取绝对值求极限有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-2)^{2(n+1)}}{(n+1)4^{n+1}} \cdot \frac{n4^n}{(x-2)^{2n}} \right| = \frac{(x-2)^2}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{(x-2)^2}{4},$$

当 $\frac{(x-2)^2}{4} < 1$, 即当 $0 < |x-2| < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 2$ 或 $2 < x < 4$ 时级数绝对收敛.

又当 $x=0$ 和 $x=4$ 时得正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 由 p 级数: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛; 当 $p \leq 1$ 时发散.

所以正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的.

综合可得级数的收敛域是 $(0, 4)$.

注: 本题也可作换元 $(x-2)^2 = t$ 后, 按如下通常求收敛半径的办法讨论幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n4^n}$ 的收

敛性.

【相关知识点】收敛半径的求法: 如果 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, 其中 a_n, a_{n+1} 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的相邻

两项的系数, 则这幂级数的收敛半径

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & 0 \leq \rho \leq +\infty, \\ +\infty, & \rho = 0, \\ 0, & \rho = +\infty. \end{cases}$$

(3) 交换积分次序 $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) **【答案】** $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy$

【解析】这是一个二重积分的累次积分, 改换积分次序时, 先表成: 原式 $= \iint_D f(x, y) dx dy$.

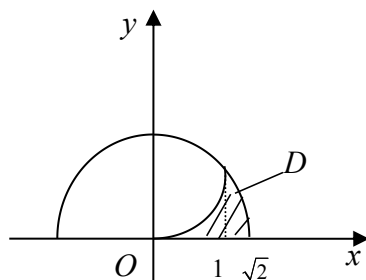
由累次积分的内外层积分限确定积分区域 D : $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, \sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{2-y^2}\}$,

即 D 中最低点的纵坐标 $y = 0$, 最高点的纵坐标

$y = 1$, D 的左边界的方程是 $x = \sqrt{y}$, 即

$y = x^2$ 的右支, D 的右边界的方程是

$x = \sqrt{2-y^2}$ 即 $x^2 + y^2 = 2$ 的右半圆,



从而画出 D 的图形如图中的阴影部分, 从图形可见 $D = D_1 + D_2$, 且

$$D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\},$$

$$D_2 = \{(x, y) | 1 \leq x \leq \sqrt{2}, 0 \leq y \leq \sqrt{2-x^2}\}.$$

所以 $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy$.

(4) 设 A 为 m 阶方阵, B 为 n 阶方阵, 且 $|A| = a, |B| = b, C = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$, 则 $|C| = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) **【答案】** $(-1)^{mn} ab$

【解析】由拉普拉斯展开式, $|C| = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| |B| = (-1)^{mn} ab$.

【相关知识点】两种特殊的拉普拉斯展开式: 设 A 是 m 阶矩阵, B 是 n 阶矩阵, 则

$$\begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|, \quad \begin{vmatrix} O & A \\ B & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| \cdot |B|.$$

(5) 将 C, C, E, E, I, N, S 等七个字母随机地排成一行, 那么, 恰好排成英文单词 SCIENCE 的概率为_____.

(5) 【答案】 $\frac{1}{1260}$

【解析】按古典概型求出基本事件总数和有利的基基本事件即可.

设所求概率为 $P(A)$, 易见, 这是一个古典型概率的计算问题, 将给出的七个字母任意排成一行, 其全部的等可能排法为 $7!$ 种, 即基本事件总数为 $n = 7!$, 而有利于事件 A 的样本点数为 $2! \cdot 2!$, 即有利事件的基本事件数为 4, 根据古典概型公式 $P(A) = \frac{2! \cdot 2!}{7!} = \frac{1}{1260}$.

二、选择题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

(1) 设 $F(x) = \frac{x^2}{x-a} \int_a^x f(t)dt$, 其中 $f(x)$ 为连续函数, 则 $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ 等于 ()

(A) a^2

(B) $a^2 f(a)$

(C) 0

(D) 不存在

(1) 【答案】 (B)

【解析】方法 1: $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ 为 “ $\frac{0}{0}$ ” 型的极限未定式, 又分子分母在点 0 处导数都存在, 所以可应用洛必达法则.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} F(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2}{x-a} \int_a^x f(t)dt = a^2 \lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t)dt}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2 f(x)}{1} = a^2 f(a). \end{aligned}$$

故应选 (B).

方法 2: 特殊值法.

$$\text{取 } f(x) = 2, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2}{x-a} \int_a^x 2dt = 2a^2.$$

显然 (A), (C), (D) 均不正确, 故选 (B).

【相关知识点】对积分上限的函数的求导公式:

若 $F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x)dx$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 均一阶可导, 则

$$F'(t) = \beta'(t) \cdot f[\beta(t)] - \alpha'(t) \cdot f[\alpha(t)].$$

(2) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下面四个无穷小量中, 哪一个比其他三个更高阶的无穷小量? ()

(A) x^2

(B) $1 - \cos x$

(C) $\sqrt{1-x^2} - 1$

(D) $x - \tan x$

(2) 【答案】(D)

【解析】由于 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\sqrt{1-x^2} - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$, 故 $x^2, 1 - \cos x, \sqrt{1-x^2} - 1$ 是同阶无穷小, 可见应选(D).

(3) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 仅有零解的充分条件是 ()

(A) A 的列向量线性无关

(B) A 的列向量线性相关

(C) A 的行向量线性无关

(D) A 的行向量线性相关

(3) 【答案】(A)

【解析】齐次方程组 $Ax = 0$ 只有零解 $\Leftrightarrow r(A) = n$.

由于 $r(A) = A$ 的行秩 = A 的列秩, 现 A 是 $m \times n$ 矩阵, $r(A) = n$, 即 A 的列向量线性无关. 故应选(A).

【相关知识点】对齐次线性方程组 $Ax = 0$, 有定理如下:

对矩阵 A 按列分块, 有 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则 $Ax = 0$ 的向量形式为

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = 0.$$

那么, $Ax = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关

$$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) < n \Leftrightarrow r(A) < n.$$

(4) 设当事件 A 与 B 同时发生时, 事件 C 必发生, 则 ()

(A) $P(C) \leq P(A) + P(B) - 1$

(B) $P(C) \geq P(A) + P(B) - 1$

(C) $P(C) = P(AB)$

(D) $P(C) = P(A \cup B)$

(4) 【答案】(B)

【解析】依题意: 由“当事件 A 与 B 同时发生时, 事件 C 必发生”得出 $AB \subset C$, 故 $P(AB) \leq P(C)$; 由概率的广义加法公式 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ 推出 $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$; 又由概率的性质 $P(A \cup B) \leq 1$, 我们得出

$$P(C) \geq P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq P(A) + P(B) - 1,$$

因此应选(B).

(5) 设 n 个随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同分布, $D(X_1) = \sigma^2, \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$,

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \text{ 则} \quad (\quad)$$

(A) S 是 σ 的无偏估计量 (B) S 是 σ 的最大似然估计量

(C) S 是 σ 的相合估计量 (即一致估计量) (D) S 与 $\bar{X}$ 相互独立

(5) 【答案】(C)

【解析】根据简单随机样本的性质, 可以将 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 视为取自方差为 σ^2 的某总体 X 的简单随机样本, $\bar{X}$ 与 S^2 是样本均值与样本方差.

由于样本方差 S^2 是总体方差的无偏估计量, 因此 $ES^2 = \sigma^2, ES \neq \sigma$, 否则若 $ES = \sigma$, 则 $(ES)^2 = \sigma^2, DS = ES^2 - (ES)^2 = 0$. 故不能选(A).

对于正态总体, S 与 $\bar{X}$ 相互独立, 由于总体 X 的分布未知, 不能选(D). 同样因总体分布未知, 也不能选(B). 综上分析, 应选(C). 进一步分析, 由于样本方差 S^2 是 σ^2 的一致估计量, 其连续函数 $S = \sqrt{S^2}$ 一定也是 σ 的一致估计量.

三、(本题满分 5 分)

$$\text{设函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2}x}, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases} \quad \text{问函数 } f(x) \text{ 在 } x=1 \text{ 处是否连续? 若不连续, 修}$$

改函数在 $x=1$ 处的定义使之连续.

【解析】函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续, 则要求 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

方法 1: 利用洛必达法则求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 为 “ $\frac{0}{0}$ ” 型的极限未定式, 又分子分母在点 0 处导数都存在, 所以连续应用两次洛必达法则, 有

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2}x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{\sin(x-1)}{\cos(x-1)}}{-\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}x} = \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(x-1)}{\cos \frac{\pi}{2}x}$$

$$= \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\cos^2(x-1)}}{(-\sin \frac{\pi x}{2}) \cdot \frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{\pi^2}.$$

而 $f(1)=1$, 故 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq 1$, 所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续.

若令 $f(1) = -\frac{4}{\pi^2}$, 则函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

方法 2: 利用变量代换与等价无穷小代换, $x \rightarrow 0$ 时, $\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$; $\ln(1+x) \sim x$.

求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, 令 $x-1=t$, 则有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi x}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \cos t}{1 - \cos \frac{\pi t}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln[1 + (\cos t - 1)]}{1 - \cos \frac{\pi t}{2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{4} t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} t^2}{\frac{\pi^2}{8} t^2} = -\frac{4}{\pi^2}. \end{aligned}$$

以下同方法 1.

四、(本题满分 5 分)

$$\text{计算 } I = \int \frac{\arccot e^x}{e^x} dx.$$

【解析】用分部积分法:

$$\begin{aligned} I &= -\int \arccot e^x de^{-x} = -e^{-x} \arccot e^x - \int e^{-x} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \\ &= -e^{-x} \arccot e^x - \int (1 - \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}) dx \\ &= -e^{-x} \arccot e^x - x + \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) + C, \quad \text{其中 } C \text{ 为任意常数.} \end{aligned}$$

注: 分部积分法的关键是要选好谁先进入积分号的问题, 如果选择不当可能引起更繁杂的计算, 最后甚至算不出结果来. 在做题的时候应该好好总结, 积累经验.

【相关知识点】分部积分公式: 假定 $u = u(x)$ 与 $v = v(x)$ 均具有连续的导函数, 则

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx, \quad \text{或者} \quad \int u dv = uv - \int v du.$$

五、(本题满分 5 分)

设 $z = \sin(xy) + \varphi(x, \frac{x}{y})$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, 其中 $\varphi(u, v)$ 有二阶偏导数.

【解析】这是带抽象函数记号的复合函数的二阶混合偏导数,重要的是要分清函数是如何复合的.

由于混合偏导数在连续条件下与求导次序无关,所以本题可以先求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, 再求 $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})$.

由复合函数求导法, 首先求 z'_x , 由题设 $z'_x = y \cos(xy) + \phi'_1 + \frac{1}{y} \phi'_2$,

再对 y 求偏导数, 即得

$$\begin{aligned} z''_{xy} &= \cos(xy) - xy \sin(xy) + (\phi'_1)'_y + \frac{1}{y} (\phi'_2)'_y - \frac{1}{y^2} \phi'_2 \\ &= \cos(xy) - xy \sin(xy) + \phi''_{12} \left(\frac{x}{y} \right)'_y + \frac{1}{y} \phi''_{22} \left(\frac{x}{y} \right)'_y - \frac{1}{y^2} \phi'_2 \\ &= \cos(xy) - xy \sin(xy) - \frac{x}{y^2} \phi''_{12} - \frac{x}{y^3} \phi''_{22} - \frac{1}{y^2} \phi'_2. \end{aligned}$$

【相关知识点】多元复合函数求导法则: 如果函数 $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ 都在点 (x, y) 具

有对 x 及对 y 的偏导数, 函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 具有连续偏导数, 则复合函数

$z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ 在点 (x, y) 的两个偏导数存在, 且有

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = f'_1 \frac{\partial u}{\partial x} + f'_2 \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = f'_1 \frac{\partial u}{\partial y} + f'_2 \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

六、(本题满分 5 分)

求连续函数 $f(x)$, 使它满足 $f(x) + 2 \int_0^x f(t) dt = x^2$.

【解析】两端对 x 求导, 得 $f'(x) + 2f(x) = 2x$. 记 $P(x) = 2, Q(x) = 2x$, 有通解

$$f(x) = e^{-\int P(x) dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right) = e^{-2x} \left(\int 2x e^{2x} dx + C \right) = C e^{-2x} + x - \frac{1}{2},$$

其中 C 为任意常数.

由原方程易见 $f(0) = 0$, 代入求得参数 $C = \frac{1}{2}$. 从而所求函数 $f(x) = \frac{1}{2} e^{-2x} + x - \frac{1}{2}$.

【相关知识点】一阶线性非齐次方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的通解为

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right), \quad \text{其中 } C \text{ 为任意常数.}$$

七、(本题满分 6 分)

求证: 当 $x \geq 1$ 时, $\arctan x - \frac{1}{2} \arccos \frac{2x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

【解析】方法 1: 令 $f(x) = \arctan x - \frac{1}{2} \arccos \frac{2x}{1+x^2} - \frac{\pi}{4}$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{2}{2} \cdot \frac{(1+x^2)(1-x^2)}{(x^2-1)(1+x^2)^2} \equiv 0 (x > 1).$$

因为 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 连续, 所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上为常数, 因为常数的导数恒为 0.

故 $f(x) = f(1) = 0$, 即 $\arctan x - \frac{1}{2} \arccos \frac{2x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

方法 2: 令 $f(x) = \arctan x - \frac{1}{2} \arccos \frac{2x}{1+x^2} - \frac{\pi}{4}$, 则 $f(x)$ 在 $[1, x]$ 上连续, 在 $(1, x)$ 内可导,

由拉格朗日中值定理知, 至少存在一点 $\xi \in (1, x)$, 使得

$$f(x) - f(1) = f'(\xi)(x-1).$$

由复合函数求导法则, 得 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{2}{2} \cdot \frac{(1+x^2)(1-x^2)}{(x^2-1)(1+x^2)^2} \equiv 0 (x > 1),$

所以 $f(x) = f(1)$. 由 $f(1) = 0$ 可得, 当 $x \geq 1$ 时, $\arctan x - \frac{1}{2} \arccos \frac{2x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

【相关知识】复合函数求导法则:

如果 $u = g(x)$ 在点 x 可导, 而 $y = f(u)$ 在点 $u = g(x)$ 可导, 则复合函数 $y = f[g(x)]$

在点 x 可导, 且其导数为

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

八、(本题满分 9 分)

设曲线方程 $y = e^{-x} (x \geq 0)$.

(1) 把曲线 $y = e^{-x}$, x 轴, y 轴和直线 $x = \xi (\xi > 0)$ 所围成平面图形绕 x 轴旋转一周,

得一旋转体, 求此旋转体体积 $V(\xi)$; 求满足 $V(a) = \frac{1}{2} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} V(\xi)$ 的 a .

(2) 在此曲线上找一点, 使过该点的切线与两个坐标轴所夹平面图形的面积最大, 并求出该面积.

【解析】对于问题(1), 先利用定积分求旋转体的公式求 $V(\xi)$, 并求出极限 $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} V(\xi)$. 问题

(2) 是导数在求最值中的应用, 首先建立目标函数, 即面积函数, 然后求最大值.

(1) 将曲线表成 y 是 x 的函数, 套用旋转体体积公式

$$V(\xi) = \pi \int_0^\xi y^2 dx = \pi \int_0^\xi e^{-2x} dx = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-2\xi}), V(a) = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-2a}),$$

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} V(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}(1 - e^{-2\xi}) = \frac{\pi}{2}.$$

由题设知 $\frac{\pi}{2}(1 - e^{-2a}) = \frac{\pi}{4}$, 得 $a = \frac{1}{2} \ln 2$.

(2) 过曲线上已知点 (x_0, y_0) 的切线方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$, 其中当 $y'(x_0)$ 存在时,

$$k = y'(x_0).$$

设切点为 (a, e^{-a}) , 则切线方程为 $y - e^{-a} = -e^{-a}(x - a)$.

令 $x = 0$, 得 $y = e^{-a}(1 + a)$, 令 $y = 0$, 得 $x = 1 + a$.

由三角形面积计算公式, 有切线与两个坐标轴夹的面积为 $S = \frac{1}{2}(1 + a)^2 e^{-a}$.

因 $S' = (1 + a)e^{-a} - \frac{1}{2}(1 + a)^2 e^{-a} = \frac{1}{2}(1 - a^2)e^{-a}$, 令 $S' = 0$, 得 $a_1 = 1, a_2 = -1$ (舍去).

由于当 $a < 1$ 时, $S' > 0$; 当 $a > 1$ 时, $S' < 0$. 故当 $a = 1$ 时, 面积 S 有极大值, 此问题中即为最大值.

故所求切点是 $(1, e^{-1})$, 最大面积为 $S = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot e^{-1} = 2e^{-1}$.

【相关知识点】 由连续曲线 $y = f(x)$ 、直线 $x = a, x = b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋

转一周所得的旋转体体积为: $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

九、(本题满分 7 分)

设矩阵 A 与 B 相似, 其中

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}.$$

(1) 求 x 和 y 的值.

(2) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$.

【解析】 因为 $A \sim B$, 故可用相似矩阵的性质建立方程组来求解参数 x 和 y 的值. 若

$P^{-1}AP = \Lambda$, 则 Λ 是 A 的特征向量. 求可逆矩阵 P 就是求 A 的特征向量.

(1) 因为 $A \sim B$, 故其特征多项式相同, 即 $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$, 即

$$(\lambda+2)[\lambda^2-(x+1)\lambda+(x-2)]=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-y).$$

由于是 λ 的多项式, 由 λ 的任意性,

$$\text{令 } \lambda=0, \text{ 得 } 2(x-2)=2y. \quad \text{令 } \lambda=1, \text{ 得 } 3 \cdot (-2)=-2(1-y).$$

由上两式解出 $y=-2$ 与 $x=0$.

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

因为 B 恰好是对角阵, 所以马上可得出矩阵 A 的特征值, 矩阵 A 的特征值是 $\lambda_1=-1, \lambda_2=2, \lambda_3=-2$.

$$\text{当 } \lambda_1=-1 \text{ 时, 由 } (-E-A)x=0, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

得到属于特征值 $\lambda=-1$ 的特征向量 $\alpha_1=(0, -2, 1)^T$.

$$\text{当 } \lambda_2=2 \text{ 时, 由 } (2E-A)x=0, \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

得到属于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量 $\alpha_2=(0, 1, 1)^T$.

$$\text{当 } \lambda_3=-2 \text{ 时, 由 } (-2E-A)x=0, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

得到属于特征值 $\lambda=-2$ 的特征向量 $\alpha_3=(1, 0, -1)^T$.

$$\text{那么令 } P=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ 有 } P^{-1}AP=B.$$

十、(本题满分 6 分)

已知三阶矩阵 $B \neq 0$, 且 B 的每一个列向量都是以下方程组的解:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

(1) 求 λ 的值; (2) 证明 $|B|=0$.

【解析】对于条件 $AB=0$ 应当有两个思路：一是 B 的列向量是齐次方程组 $Ax=0$ 的解；另一个是秩的信息即 $r(A)+r(B)\leq n$. 要有这两种思考问题的意识.

(1) 方法 1: 令 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 对 3 阶矩阵 A , 由 $AB=0, B\neq 0$ 知必有 $|A|=0$, 否则 A

可逆, 从而 $B=A^{-1}(AB)=A^{-1}0=0$, 这与 $B\neq 0$ 矛盾. 故

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

用行列式的等价变换, 将第三列加到第二列上, 再按第二列展开, 有

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & \lambda-1 & \lambda \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}=5(\lambda-1)=0.$$

解出 $\lambda=1$.

方法 2: 因为 $B\neq 0$, 故 B 中至少有一个非零列向量. 依题意, 所给齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解, 得系数矩阵的列向量组线性相关, 于是

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

以下同方法一.

(2) 反证法: 对于 $AB=0$, 若 $|B|\neq 0$, 则 B 可逆, 那么 $A=(AB)B^{-1}=0B^{-1}=0$. 与已知条件 $A\neq 0$ 矛盾. 故假设不成立, $|B|=0$.

【相关知识点】对齐次线性方程组 $Ax=0$, 有定理如下:

对矩阵 A 按列分块, 有 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则 $Ax=0$ 的向量形式为

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\dots+x_n\alpha_n=0.$$

那么, $Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关

$$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) < n \Leftrightarrow r(A) < n.$$

对矩阵 B 按列分块, 记 $B=(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 那么

$$AB=A(\beta_1, \beta_2, \beta_3)=(A\beta_1, A\beta_2, A\beta_3)=(0, 0, 0).$$

因而 $A\beta_i=0, i=(1, 2, 3)$, 即 β_i 是 $Ax=0$ 的解.

十一、(本题满分 6 分)

设 A 、 B 分别为 m 、 n 阶正定矩阵, 试判定分块矩阵 $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 是否是正定矩阵.

【解析】在证明一个矩阵是正定矩阵时, 不要忘记验证该矩阵是对称的.

方法 1: 定义法.

因为 A 、 B 均为正定矩阵, 由正定矩阵的性质, 故 $A^T = A, B^T = B$, 那么

$$C^T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ 0 & B^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = C, \text{ 即 } C \text{ 是对称矩阵.}$$

设 $m+n$ 维列向量 $Z^T = (X^T, Y^T)$, 其中 $X^T = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $Y^T = (y_1, y_2, \dots, y_n)$,

若 $Z \neq 0$, 则 X, Y 不同时为 0, 不妨设 $X \neq 0$, 因为 A 是正定矩阵, 所以 $X^T A X > 0$.

又因为 B 是正定矩阵, 故对任意的 n 维向量 Y , 恒有 $Y^T A Y \geq 0$. 于是

$$Z^T C Z = (X^T, Y^T) \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = X^T A X + Y^T A Y > 0,$$

即 $Z^T C Z$ 是正定二次型, 因此 C 是正定矩阵.

方法 2: 用正定的充分必要条件是特征值大于 0, 这是证明正定时很常用的一种方法.

因为 A 、 B 均为正定矩阵, 由正定矩阵的性质, 故 $A^T = A, B^T = B$,

$$\text{那么 } C^T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ 0 & B^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = C, \text{ 即 } C \text{ 是对称矩阵.}$$

设 A 的特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, B 的特征值是 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. 由 A, B 均正定, 知

$\lambda_i > 0, \mu_j > 0$ ($i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$). 因为

$$\begin{aligned} |\lambda E - C| &= \begin{vmatrix} \lambda E_m - A & 0 \\ 0 & \lambda E_n - B \end{vmatrix} = |\lambda E_m - A| \cdot |\lambda E_n - B| \\ &= (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_m) (\lambda - \mu_1) \cdots (\lambda - \mu_n), \end{aligned}$$

于是, 矩阵 C 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$.

因为 C 的特征值全大于 0, 所以矩阵 C 正定.

十二、(本题满分 7 分)

假设测量的随机误差 $X \sim N(0, 10^2)$, 试求 100 次独立重复测量中, 至少有三次测量误差

的绝对值大于 19.6 的概率 α , 并利用泊松分布求出 α 的近似值 (要求小数点后取两位有效数字).

[附表]

λ	1	2	3	4	5	6	7	...
$e^{-\lambda}$	0.368	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	...

【解析】设事件 $A =$ “每次测量中测量误差的绝对值大于 19.6”, 因为 $X \sim N(0, 10^2)$, 即

$EX = \mu = 0, DX = \sigma^2 = 10^2$. 根据正态分布的性质则有:

$$\begin{aligned}
 p &= P(A) = P\{|X| > 19.6\} = P\left\{\left|\frac{X - \mu}{\sigma}\right| > \frac{19.6 - \mu}{\sigma}\right\} \\
 &= P\left\{\frac{|X - 0|}{10} > \frac{19.6 - 0}{10}\right\} = P\left\{\frac{|X|}{10} > 1.96\right\} \\
 &= 1 - P\left\{-1.96 \leq \frac{X}{10} \leq 1.96\right\} = 1 - [\Phi(1.96) - \Phi(-1.96)] \\
 &= 1 - [\Phi(1.96) - (1 - \Phi(1.96))] = 2 - 2\Phi(1.96) \\
 &= 2[1 - \Phi(1.96)] = 0.05.
 \end{aligned}$$

设 Y 为 100 次独立重复测量中事件 A 出现的次数, 则 Y 服从参数为 $n = 100, p = 0.05$

的二项分布. 根据二项分布的定义, $P\{Y = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k = 0, 1, 2, \dots)$, 则至少有三次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率 α 为:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= P\{Y \geq 3\} = 1 - P\{Y < 3\} = 1 - P\{Y = 0\} - P\{Y = 1\} - P\{Y = 2\} \\
 &= 1 - C_{100}^0 0.05^0 (1-0.05)^{100} - C_{100}^1 0.05^1 (1-0.05)^{100-1} - C_{100}^2 0.05^2 (1-0.05)^{100-2} \\
 &= 1 - 0.95^{100} - 100 \times 0.95^{99} \times 0.05 - \frac{100 \times 99}{2} \times 0.95^{98} \times 0.05^2.
 \end{aligned}$$

根据泊松定理, 对于成功率为 p 的 n 重伯努利试验, 只要独立重复试验的次数 n 充分大, 而 p 相当小 (一般要求 $n \geq 100, p \leq 0.1$), 则其成功次数可以认为近似服从参数为 $\lambda = np$ 的泊松分布, 具体应用模式为若 $Y \sim B(n, p)$, 则当 n 充分大, p 相当小时当 Y 近似服从参数为 $\lambda = np$

的泊松分布, 即 $P\{Y = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} (k = 0, 1, 2, \dots)$.

设 Y 为 100 次独立重复测量中事件 A 出现的次数, 则 Y 服从参数为 $n = 100, p = 0.05$ 的

二项分布, 故

$$\begin{aligned}\alpha &= P\{Y \geq 3\} = 1 - P\{Y < 3\} = 1 - P\{Y = 0\} - P\{Y = 1\} - P\{Y = 2\} \\ &\approx 1 - \frac{(\lambda)^0}{0!} e^{-\lambda} - \frac{(\lambda)^1}{1!} e^{-\lambda} - \frac{(\lambda)^2}{2!} e^{-\lambda} = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} \\ &= 1 - e^{-5} \left(1 + 5 + \frac{5^2}{2}\right) \approx 0.87.\end{aligned}$$

十三、(本题满分 5 分)

一台设备由三大部分构成, 在设备运转中各部件需要调整的概率相应为 0.10, 0.20 和 0.30. 假设各部件的状态相互独立, 以 X 表示同时需要调整的部件数, 试求 X 的数学期望 EX 和方差 DX .

【解析】令随机变量

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 个部件需调整,} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 个部件不需调整,} \end{cases} \quad i=1, 2, 3.$$

依题意 X_1, X_2, X_3 相互独立, 且 X_1, X_2, X_3 分别服从参数为 0.1, 0.2, 0.3 的 0-1 分布, 即

X_1	0	1
p	0.9	0.1

X_2	0	1
p	0.8	0.2

X_3	0	1
p	0.7	0.3

由题意知 $X = X_1 + X_2 + X_3$, 显然 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 又 X_1, X_2, X_3 相互独立, 所以

$$\begin{aligned}(1) \quad P\{X = 0\} &= P\{X_1 + X_2 + X_3 = 0\} = P\{X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0\} \\ &= P\{X_1 = 0\}P\{X_2 = 0\}P\{X_3 = 0\} = 0.9 \times 0.8 \times 0.7 = 0.504, \\ P\{X = 1\} &= P\{X_1 + X_2 + X_3 = 1\} \\ &= P\{X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0\} \\ &\quad + P\{X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0\} + P\{X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1\} \\ &= P\{X_1 = 1\}P\{X_2 = 0\}P\{X_3 = 0\} \\ &\quad + P\{X_1 = 0\}P\{X_2 = 1\}P\{X_3 = 0\} + P\{X_1 = 0\}P\{X_2 = 0\}P\{X_3 = 1\} \\ &= 0.1 \times 0.8 \times 0.7 + 0.9 \times 0.2 \times 0.7 + 0.9 \times 0.8 \times 0.3 = 0.398, \\ P\{X = 3\} &= P\{X_1 + X_2 + X_3 = 3\} = P\{X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1\}\end{aligned}$$

$$= P\{X_1 = 1\}P\{X_2 = 1\}P\{X_3 = 1\} = 0.1 \times 0.2 \times 0.3 = 0.006.$$

由 $P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = 1$ 得出

$$\begin{aligned} P\{X = 2\} &= 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} - P\{X = 3\} \\ &= 1 - 0.504 - 0.398 - 0.006 = 0.092. \end{aligned}$$

因此 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
p	0.504	0.398	0.092	0.006

(2) 令 $p_1 = P\{X_1 = 1\} = 0.1, p_2 = P\{X_2 = 1\} = 0.2, p_3 = P\{X_3 = 1\} = 0.3$, 因 X_i 均服从 0-1

分布, 故 $EX_i = p_i, DX_i = p_i(1 - p_i)$ 所以 $E(X_1) = 0.1, E(X_2) = 0.2, E(X_3) = 0.3$,

$$D(X_1) = 0.1 \times 0.9 = 0.09, D(X_2) = 0.2 \times 0.8 = 0.16, D(X_3) = 0.3 \times 0.7 = 0.21$$

$X = X_1 + X_2 + X_3$. 因 X_i 服从 0-1 分布, 且 X_1, X_2, X_3 相互独立, 故由数学期望与方差的

$$\text{性质} \quad EX = E(X_1 + X_2 + X_3) = EX_1 + EX_2 + EX_3 = 0.6.$$

$$DX = D(X_1 + X_2 + X_3) = DX_1 + DX_2 + DX_3 = 0.46.$$

注: X 的期望与方差也可以直接用期望与方差的公式来计算:

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times P\{X = 0\} + 1 \times P\{X = 1\} + 2 \times P\{X = 2\} + 3 \times P\{X = 3\} \\ &= 0 \times 0.504 + 1 \times 0.398 + 2 \times 0.092 + 3 \times 0.006 = 0.6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(X) &= 0^2 \times P\{X = 0\} + 1^2 \times P\{X = 1\} + 2^2 \times P\{X = 2\} + 3^2 \times P\{X = 3\} \\ &= 0^2 \times 0.504 + 1^2 \times 0.398 + 2^2 \times 0.092 + 3^2 \times 0.006 = 0.46. \end{aligned}$$

十四、(本题满分 4 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

(1) 求随机变量 X 的密度 $f_X(x)$; (2) 求概率 $P\{X + Y \leq 1\}$.

【解析】(1) 已知联合概率密度可以直接利用求边缘密度的公式 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy$ 求出边缘概率密度.

$$\text{当 } x \leq 0 \text{ 时, } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0dy = 0;$$

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^x 0 dy + \int_x^{+\infty} e^{-y} dy = -e^{-y} \Big|_x^{+\infty} = e^{-x}.$$

因此 X 的密度为

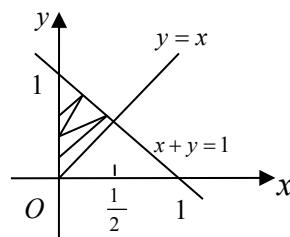
$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(2) 概率 $P\{X+Y \leq 1\}$ 实际上是计算一个二重积分, 根据概率的计算公式:

$$P\{X+Y \leq 1\} = \iint_{x+y \leq 1} f(x, y) dx dy,$$

再由二重积分的计算, 化为累计积分求得概率

$$P\{X+Y \leq 1\}.$$



$$P\{X+Y \leq 1\} = \iint_{x+y \leq 1} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{1-x} e^{-y} dy$$

$$= -\int_0^{\frac{1}{2}} [e^{-(1-x)} - e^{-x}] dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} e^{x-1} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x} dx = 1 - 2e^{-\frac{1}{2}} + e^{-1}.$$