

1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题(本题共 5 个小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

(1) 【答案】 $0 < x \leq \frac{1}{4}$

【解析】由连续可导函数的导数与 0 的关系判别函数的单调性.

将函数 $F(x) = \int_1^x (2 - \frac{1}{\sqrt{t}}) dt$, 两边对 x 求导, 得 $F'(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

若函数 $F(x)$ 严格单调减少, 则 $F'(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}} < 0$, 即 $\sqrt{x} < \frac{1}{2}$.

所以函数 $F(x)$ 单调减少区间为 $0 < x \leq \frac{1}{4}$.

【相关知识点】函数的单调性: 设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导.

(1) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) > 0$, 那么函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加;

(2) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) < 0$, 那么函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少.

(2) 【答案】 $\frac{1}{\sqrt{5}}\{0, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$

【解析】先写出旋转面 S 的方程: $3(x^2 + z^2) + 2y^2 = 12$.

令 $F(x, y, z) = 3(x^2 + z^2) + 2y^2 - 12$.

则 S 在点 (x, y, z) 的法向量为

$$\vec{n} = \pm \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\} = \pm \{6x, 4y, 6z\},$$

所以在点 $(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ 处的法向量为

$$\vec{n} = \pm \{0, 4\sqrt{3}, 6\sqrt{2}\} = \pm 2\{0, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}\}.$$

因指向外侧, 故应取正号, 单位法向量为

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{2\{0, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}\}}{\sqrt{(0)^2 + (4\sqrt{3})^2 + (6\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{30}}\{0, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}\} = \frac{1}{\sqrt{5}}\{0, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}.$$

(3) 【答案】 $\frac{2}{3}\pi$

【解析】按傅式系数的积分表达式 $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$,

所以
$$b_3 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi x + x^2) \sin 3x dx = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin 3x dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin 3x dx.$$

因为 $x^2 \sin 3x$ 为奇函数, 所以 $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin 3x dx = 0$;

$x \sin 3x dx$ 为偶函数, 所以

$$\begin{aligned} b_3 &= \int_{-\pi}^{\pi} x \sin 3x dx = 2 \int_0^{\pi} x \sin 3x dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} x d\left(-\frac{1}{3} \cos 3x\right) = \left[-\frac{2x}{3} \cos 3x\right]_0^{\pi} + \frac{2}{3} \int_0^{\pi} \cos 3x dx \\ &= \frac{2}{3} \pi + \frac{2}{3} \left[\frac{\sin 3x}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3} \pi. \end{aligned}$$

(4) 【答案】 $\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$

【解析】先计算 u 的梯度, 再计算该梯度的散度.

因为
$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k},$$

所以
$$\text{div}(\text{grad } u) = \text{div} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

数量场 $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 分别对 x, y, z 求偏导数, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2},$$

由对称性知

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2},$$

将 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ 分别对 x, y, z 求偏导, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{z^2 + x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶但非等价的无穷小量. 应选 (B).

【相关知识】 无穷小的比较:

设在同一个极限过程中, $\alpha(x), \beta(x)$ 为无穷小且存在极限 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = l$,

(1) 若 $l \neq 0$, 称 $\alpha(x), \beta(x)$ 在该极限过程中为同阶无穷小;

(2) 若 $l = 1$, 称 $\alpha(x), \beta(x)$ 在该极限过程中为等价无穷小, 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

(3) 若 $l = 0$, 称在该极限过程中 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小, 记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 不存在 (不为 ∞), 称 $\alpha(x), \beta(x)$ 不可比较.

(2) **【答案】** (A)

【解析】 由方程可以看出双纽线关于 x 轴、 y 轴对称, (如草图)

只需计算所围图形在第一象限部分的面积;

双纽线的直角坐标方程复杂, 而极坐标方程

较为简单: $\rho^2 = \cos 2\theta$.

显然, 在第一象限部分 θ 的变化范围是

$\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$. 再由对称性得

$$S = 4S_1 = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta,$$

应选 (A).

(3) **【答案】** (C)

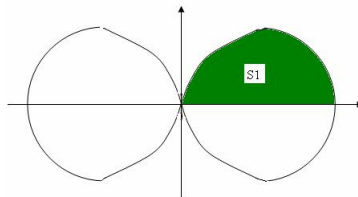
【解析】 这实质上是求两个向量的夹角问题, L_1 与 L_2 的方向向量分别是

$$\vec{l}_1 = (1, -2, 1), \quad \vec{l}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 2),$$

L_1 与 L_2 的夹角 φ 的余弦为

$$\cos \varphi = |\cos(\vec{l}_1, \vec{l}_2)| = \frac{|\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2|}{|\vec{l}_1| |\vec{l}_2|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2},$$

所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 应选 (C).



(4) 【答案】(B)

【解析】在所考察的单连通区域上, 该曲线积分与路径无关 $\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial y}((f(x)-e^x)\sin y) = \frac{\partial}{\partial x}(-f(x)\cos y),$$

即 $(f(x)-e^x)\cos y = -f'(x)\cos y,$

化简得 $f'(x)+f(x)=e^x$, 即 $[e^x f(x)]' = e^{2x},$

解之得 $e^x f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$, 所以 $f(x) = e^{-x}(\frac{1}{2}e^{2x} + C).$

由 $f(0)=0$ 得 $C = -\frac{1}{2}$, 因此 $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, 故应选(B).

【相关知识点】曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 在单连通区域内与路径无关的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

(5) 【答案】(C)

【解析】若 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, $AB=0$, 则 $r(A)+r(B) \leq n$.

当 $t=6$ 时, 矩阵的三行元素对应成比例, $r(Q)=1$, 有 $r(P)+r(Q) \leq 3$, 知 $r(P) \leq 2$,

所以, $r(P)$ 可能是 1, 也有可能是 2, 所以(A)、(B)都不准确;

当 $t \neq 6$ 时, 矩阵的第一行和第三行元素对应成比例, $r(Q)=2$, 于是从 $r(P)+r(Q) \leq 3$

得 $r(P) \leq 1$, 又因 $P \neq 0$, 有 $r(P) \geq 1$, 从而 $r(P)=1$ 必成立, 所以应当选(C).

三、(本题共 3 小题, 每小题 5 分, 满分 15 分.)

(1) 【解析】令 $\frac{1}{x}=t$, 则当 $x \rightarrow \infty$ 时, $t \rightarrow 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x})^x = \lim_{t \rightarrow 0} (\sin 2t + \cos t)^{\frac{1}{t}},$$

这是 1^∞ 型未定式,

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\sin 2t + \cos t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + \sin 2t + \cos t - 1)^{\frac{1}{\sin 2t + \cos t - 1} \cdot \frac{\sin 2t + \cos t - 1}{t}},$$

而 $\lim_{t \rightarrow 0} (1 + \sin 2t + \cos t - 1)^{\frac{1}{\sin 2t + \cos t - 1}}$ 是两个重要极限之一, 即

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 + \sin 2t + \cos t - 1)^{\frac{1}{\sin 2t + \cos t - 1}} = e.$$

所以 $\lim_{t \rightarrow 0} (\sin 2t + \cos t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{\sin 2t + \cos t - 1}{t}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t + \cos t - 1}{t}}.$

而 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t + \cos t - 1}{t} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2t - \sin t}{1} = 2,$

故 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)^x = e^2.$

(2) 【解析】方法一: $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = 2 \int x d\sqrt{e^x - 1} = 2x\sqrt{e^x - 1} - 2 \int \sqrt{e^x - 1} dx.$

令 $\sqrt{e^x - 1} = t$, 则 $x = \ln(t^2 + 1), dx = \frac{2tdt}{t^2 + 1},$

所以 $\int \sqrt{e^x - 1} dx = \int t \cdot \frac{2tdt}{t^2 + 1} = 2 \int \frac{t^2}{t^2 + 1} dt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right) dt$
 $= 2t - 2 \arctan t + C = 2\sqrt{e^x - 1} - 2 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C,$

所以 $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = 2x\sqrt{e^x - 1} - 2 \int \sqrt{e^x - 1} dx$
 $= 2x\sqrt{e^x - 1} - 4\sqrt{e^x - 1} + 4 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C.$

方法二: 令 $\sqrt{e^x - 1} = t$, 则 $e^x = t^2 + 1, x = \ln(t^2 + 1), dx = \frac{2tdt}{t^2 + 1},$

所以 $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \int \frac{(t^2 + 1) \ln(t^2 + 1)}{t} \cdot \frac{2t}{t^2 + 1} dt = 2 \int \ln(t^2 + 1) dt$
 $= 2t \ln(t^2 + 1) - 2 \int t d \ln(t^2 + 1) = 2t \ln(t^2 + 1) - 4 \int \frac{t^2}{t^2 + 1} dt.$

关于 $\int \frac{t^2}{t^2 + 1} dt$ 的求解同方法一, 所以

$$\begin{aligned} \int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx &= 2t \ln(t^2 + 1) - 4(t - \arctan t) + C \\ &= 2x\sqrt{e^x - 1} - 4\sqrt{e^x - 1} + 4 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C. \end{aligned}$$

(3) 【解析】解法一: 所给方程为伯努利方程, 两边除以 y^2 得

$$x^2 y^{-2} y' + x y^{-1} = 1, \text{ 即 } -x^2 (y^{-1})' + x y^{-1} = 1.$$

令 $y^{-1} = z$, 则方程化为 $-x^2 z' + xz = 1$, 即 $z' - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{x^2}$,

即 $\left(\frac{z}{x}\right)' = -\frac{1}{x^3}$,

积分得 $\frac{z}{x} = \frac{1}{2}x^{-2} + C$.

由 $y^{-1} = z$ 得 $\frac{1}{xy} = \frac{1}{2}x^{-2} + C$,

即 $y = \frac{2x}{1+2Cx^2}$,

代入初始条件 $y|_{x=1}=1$, 得 $C = \frac{1}{2}$, 所以所求方程的特解是 $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

解法二: 所给方程可写成 $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}$ 的形式, 此方程为齐次方程.

令 $\frac{y}{x} = u$, 则 $y = xu, y' = u + xu'$, 所以方程可化为

$$u + xu' = u^2 - u, \text{ 分离变量得 } \frac{du}{u(u-2)} = \frac{dx}{x},$$

积分得 $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-2}{u} \right| = \ln |x| + C_1$, 即 $\frac{u-2}{u} = Cx^2$.

以 $\frac{y}{x} = u$ 代入上式, 得 $y - 2x = Cx^2y$. 代入初始条件 $y|_{x=1}=1$, 得 $C = -1$,

故特解为 $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

四、(本题满分 6 分)

【解析】 将 I 表成 $I = \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2z + z - 2z = z.$$

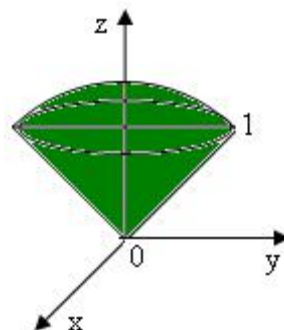
又 Σ 是封闭曲面, 可直接用高斯公式计算.

记 Σ 围成区域 Ω , 见草图, Σ 取外侧, 由高斯公式得

$$I = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \iiint_{\Omega} z dV.$$

用球坐标变换求这个三重积分.

在球坐标变换下, Ω 为: $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}$, 于是



$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_{\Omega} z dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho \cos \varphi \rho^2 \sin \varphi d\rho \\
 &= 2\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d \sin \varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho \\
 &= 2\pi \cdot \left[\frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

五、(本题满分 7 分)

【解析】先将级数分解,

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 - n + 1)}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n-1)}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

第二个级数是几何级数, 它的和已知

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}.$$

求第一个级数的和转化为幂级数求和. 考察

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \quad (|x| < 1).$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n(n-1) x^{n-2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \right)'' = \left(\frac{1}{1+x} \right)'' = \frac{2}{(1+x)^3},$$

所以
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n-1)}{2^n} = \frac{1}{2^2} S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{4}{27}.$$

因此原级数的和
$$A = \frac{4}{27} + \frac{2}{3} = \frac{22}{27}.$$

六、(本题共 2 小题, 每小题 5 分, 满分 10 分.)

(1) 【解析】证法一: 由拉格朗日中值定理可知, 在 $(0, x)$ 存在一点 ξ , 使得

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0) = xf'(\xi),$$

即
$$f(x) = xf'(\xi) + f(0).$$

因为 $f'(\xi) \geq k > 0$, 所以当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $xf'(\xi) \rightarrow +\infty$, 故 $f(x) \rightarrow +\infty$.

由 $f(0) < 0$, 所以在 $(0, x)$ 上由介值定理可知, 必有一点 $\eta \in (0, x)$ 使得 $f(\eta) = 0$.

又因为 $f'(\xi) \geq k > 0$, 故 $f(x)$ 为严格单调增函数, 故 η 值唯一.

证法二: 用牛顿-莱布尼兹公式, 由于

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt \geq f(0) + \int_0^x k dt = f(0) + kx,$$

以下同方法 1.

(2) 【解析】先将不等式做恒等变形:

因为 $b > a > e$, 故原不等式等价于 $b \ln a > a \ln b$ 或 $\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b}$.

证法一: 令 $f(x) = x \ln a - a \ln x$, ($x > a > e$), 则 $f'(x) = \ln a - \frac{a}{x}$.

因为 $x > a > e$, 所以 $\ln a > 1, \frac{a}{x} < 1$, 故 $f'(x) = \ln a - \frac{a}{x} > 0$.

从而 $f(x)$ 在 $x > a > e$ 时为严格的单调递增函数, 故 $f(x) > f(a) = 0$, ($x > a > e$).

由此 $f(b) = b \ln a - a \ln b > 0$, 即 $a^b > b^a$.

证法二: 令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ($x > e$), 则 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 为严格的单调递减函数, 故存在 $b > a > e$ 使得

$$f(b) = \frac{\ln b}{b} < f(a) = \frac{\ln a}{a}$$

成立. 即 $a^b > b^a$.

七、(本题满分 8 分)

【解析】写出二次型 f 的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{pmatrix}$, 它的特征方程是

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 & -a \\ 0 & -a & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 6\lambda + 9 - a^2) = 0.$$

f 经正交变换化成标准形 $f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$, 那么标准形中平方项的系数 1, 2, 5 就是 A 的特征值.

把 $\lambda = 1$ 代入特性方程, 得 $a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = \pm 2$.

因 $a > 0$ 知 $a = 2$. 这时 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_1 = 1$, 由 $(E - A)x = 0$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 得 $X_1 = (0, 1, -1)^T$.

对于 $\lambda_2 = 2$, 由 $(2E - A)x = 0$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 得 $X_2 = (1, 0, 0)^T$.

对于 $\lambda_3 = 5$, 由 $(5E - A)x = 0$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 得 $X_3 = (0, 1, 1)^T$.

将 X_1, X_2, X_3 单位化, 得

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

故所用的正交变换矩阵为

$$P = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

【相关知识点】二次型的定义: 含有 n 个变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的二次齐次多项式(即每项都是二次的多项式)

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \text{ 其中 } a_{ij} = a_{ji},$$

称为 n 元二次型. 令 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $A = (a_{ij})$, 则二次型可用矩阵乘法表示为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x,$$

其中 A 是对称矩阵($A^T = A$), 称 A 为二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的矩阵.

八、(本题满分 6 分)

【解析】证法一：对 B 按列分块，记 $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ ，若

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_n\beta_n = 0,$$

即 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = 0$ ，亦即 $B \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = 0$ 。

两边左乘 A ，得 $AB \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = 0$ ，即 $E \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = 0$ ，亦即 $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = 0$ 。

所以 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性无关。

证法二：因为 B 是 $m \times n$ 矩阵， $n < m$ ，所以 $r(B) \leq n$ 。

又因 $r(B) \geq r(AB) = r(E) = n$ ，故 $r(B) = n$ 。所以 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性无关。

【相关知识点】1. 向量组线性相关和线性无关的定义：存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$ ，

使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$ ，则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关；否则，称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

2. 矩阵乘积秩的结论：乘积的秩小于等于单个矩阵的秩

九、(本题满分 6 分)

【解析】如图，设当 A 运动到 $(0, Y)$ 时， B 运动到 (x, y) 。

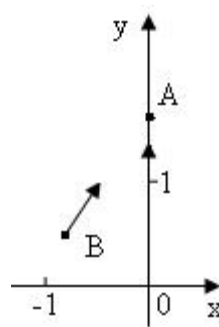
由 B 的方向始终指向 A ，有 $\frac{dy}{dx} = \frac{y-Y}{x-0}$ ，即

$$Y = y - x \frac{dy}{dx}. \quad (1)$$

又由 $v = \frac{dY}{dt}$ ， $2v = \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$ ，得

$$\sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = 2 \frac{dY}{dt}.$$

由题意， $x(t)$ 单调增， $\frac{dx}{dt} > 0$ ，所以 $\frac{dx}{dt} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 2 \frac{dY}{dt}$ 。亦即



$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 2 \frac{dY}{dx}. \quad (2)$$

由(1), (2)消去 Y , $\frac{dY}{dx}$, 便得微分方程 $2xy'' + \sqrt{1 + y'^2} = 0$.

初始条件显然是 $y(-1) = 0, y'(-1) = 1$.

十、填空题(本题共 2 小题, 每小题 3 分, 满分 6 分, 把答案填在题中横线上.)

(1) 【解析】可以用古典概型, 也可以用抽签原理.

方法一: 从直观上看, 第二次抽出次品的可能性与第一次抽到正品还是次品有关, 所以考虑用全概率公式计算.

$$\begin{aligned} \text{设事件 } B_i = \text{"第 } i \text{ 次抽出次品"} \quad i=1, 2, \text{ 由已知得 } P(B_1) = \frac{2}{12}, P(\bar{B}_1) = \frac{10}{12}, \\ P(B_2 | B_1) = \frac{1}{11}, P(B_2 | \bar{B}_1) = \frac{2}{11}. \text{ 应用全概率公式} \\ P(B_2) = P(B_1)P(B_2 | B_1) + P(\bar{B}_1)P(B_2 | \bar{B}_1) = \frac{2}{12} \times \frac{1}{11} + \frac{10}{12} \times \frac{2}{11} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

方法二: 对填空题和选择题可直接用抽签原理得到结果.

由抽签原理(抽签与先后次序无关), 不放回抽样中第二次抽得次品的概率与第一次抽得次品的概率相同, 都是 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

(2) 【解析】方法一: 可以用分布函数法, 即先求出分布函数, 再求导得到概率密度函数.

由已知条件, X 在区间 $(0, 2)$ 上服从均匀分布, 得 X 的概率密度函数为

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}.$$

先求 F 的分布函数 $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$.

当 $y \leq 0$ 时, $F_Y(y) = 0$; 当 $y \geq 4$ 时, $F_Y(y) = 1$; 当 $0 < y < 4$ 时,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\} = P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\} \\ &= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} F_X(x) dx = \int_{-\sqrt{y}}^0 0 dx + \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{2} dx = \frac{\sqrt{y}}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{即 } F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \frac{\sqrt{y}}{2}, & 0 < y < 4, \\ 1, & y \geq 4. \end{cases}$$

于是, 对分布函数求导得密度函数

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}}, & 0 < y < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

故随机变量 $Y = X^2$ 在 $(0, 4)$ 内的概率分布密度 $f_Y(y) = \frac{1}{4\sqrt{y}}$.

方法二: 也可以应用单调函数公式法.

由于 $y = x^2$ 在 $(0, 4)$ 内单调, 反函数 $x = h(y) = \sqrt{y}$ 在 $(0, 2)$ 内可导, 且导数

$h'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ 恒不为零, 因此, 由连续型随机变量函数的密度公式, 得到随机变量 Y 的概率

密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} |h'(y)| f_X[h(y)], & 0 < y < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2}, & 0 < y < 4, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}}, & 0 < y < 4, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

故随机变量 $Y = X^2$ 在 $(0, 4)$ 内的概率分布密度 $f_Y(y) = \frac{1}{4\sqrt{y}}$.

十一、(本题满分 6 分)

【解析】 (1) 第一问是常规问题, 直接运用公式对其计算可得期望与方差.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{2} e^{-|x|} dx = 0.$$

(因为被积函数 $\frac{x}{2} e^{-|x|}$ 是奇函数, 积分区域关于 y 轴对称, 所以积分值为 0.)

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{2} e^{-|x|} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-|x|} dx \xrightarrow{\text{偶函数积分的性质}} \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx \\ &= 2(-xe^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx) \\ &= 2(-e^{-x} \Big|_0^{+\infty}) = 2. \end{aligned}$$

(2) 根据协方差的计算公式 $cov(X, Y) = E(X|X|) - E(X)E(|X|)$ 来计算协方差.

因为 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{2} e^{-|x|} dx = 0$, 所以

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E(X | X|) - 0E(|X|) = E(X | X|) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x |x| f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} x |x| e^{-|x|} dx = 0. \end{aligned}$$

(因为被积函数 $\frac{x}{2}|x|e^{-|x|}$ 是奇函数, 积分区域关于 y 轴对称, 所以积分值为 0.)

所以 X 与 $|X|$ 不相关.

(3) 方法一:

对于任意正实数 $a(0 < a < +\infty)$, 事件 $\{|X| < a\}$ 含于事件 $\{X < a\}$, 且

$$0 < P\{X < a\} < 1,$$

所以 $P\{X < a, |X| < a\} = P\{|X| < a\}$, $P\{X < a\}P\{|X| < a\} < P\{|X| < a\}$,

可见 $P\{X < a, |X| < a\} \neq P\{|X| < a\}P\{X < a\}$,

因此 X 与 $|X|$ 不独立.

方法二: 因为 $P\{X \leq 1\} = \int_{-\infty}^1 f(x) dx = \int_{-\infty}^1 \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = 1 - \int_1^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-x} dx = 1 + \frac{1}{2} e^{-x} \Big|_1^{+\infty} = 1 - \frac{1}{2e}$;

又 $P\{|X| \leq 1\} = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$, 显然有

$P\{X \leq 1, |X| \leq 1\} = P\{|X| \leq 1\} \neq P\{X \leq 1\}P\{|X| \leq 1\}$, 因此 X 与 $|X|$ 不独立.