

1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

(1) 【答案】 0

【解析】这是个 $0 \cdot \infty$ 型未定式, 可将其等价变换成 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 从而利用洛必达法则进行求解.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0.$$

(2) 【答案】 $\frac{y^2 - e^x - 2x \cos(x^2 + y^2)}{2y \cos(x^2 + y^2) - 2xy}$

【解析】这是一个由复合函数和隐函数所确定的函数, 将方程 $\sin(x^2 + y^2) + e^x - xy^2 = 0$ 两边对 x 求导, 得

$$\cos(x^2 + y^2) \cdot (2x + 2yy') + e^x - y^2 - 2xyy' = 0,$$

化简得 $y' = \frac{y^2 - e^x - 2x \cos(x^2 + y^2)}{2y \cos(x^2 + y^2) - 2xy}.$

【相关知识点】复合函数求导法则:

如果 $u = g(x)$ 在点 x 可导, 而 $y = f(u)$ 在点 $u = g(x)$ 可导, 则复合函数 $y = f[g(x)]$

在点 x 可导, 且其导数为

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

(3) 【答案】 $0 < x \leq \frac{1}{4}$

【解析】由连续可导函数的导数与0的关系判别函数的单调性.

将函数 $F(x) = \int_1^x (2 - \frac{1}{\sqrt{t}}) dt$, 两边对 x 求导, 得 $F'(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

若函数 $F(x)$ 严格单调减少, 则 $F'(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}} < 0$, 即 $\sqrt{x} < \frac{1}{2}$.

所以函数 $F(x)$ 单调减少区间为 $0 < x \leq \frac{1}{4}$.

【相关知识点】函数的单调性: 设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导.

(1) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) > 0$, 那么函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加;

(2) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) < 0$, 那么函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少.

(4) 【答案】 $2 \cos^{-1/2} x + C$

【解析】
$$\begin{aligned} \int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}} dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x \sqrt{\cos x}} dx = \int \sin x \cos^{-\frac{3}{2}} x dx \\ &= -\int \cos^{-\frac{3}{2}} x d \cos x = 2 \cos^{-\frac{1}{2}} x + C. \end{aligned}$$

(5) 【答案】 $\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

【解析】这是微分方程的简单应用.

由题知 $\frac{dy}{dx} = x \ln(1+x^2)$, 分离变量得 $dy = x \ln(1+x^2) dx$, 两边对 x 积分有

$$y = \int x \ln(1+x^2) dx = \frac{1}{2} \int \ln(1+x^2) d(x^2+1).$$

由分部积分法得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \ln(1+x^2) d(x^2+1) &= \frac{1}{2} (1+x^2) \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \int (1+x^2) \cdot \frac{2x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} (1+x^2) \ln(1+x^2) - \int x dx \\ &= \frac{1}{2} (1+x^2) \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} x^2 + C. \end{aligned}$$

因为曲线 $y = f(x)$ 过点 $(0, -\frac{1}{2})$, 故 $C = -\frac{1}{2}$, 所以所求曲线为

$$y = \frac{1}{2} (1+x^2) \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2}.$$

二、选择题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

(1) 【答案】(D)

【解析】因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin \frac{1}{x}$ 是振荡函数, 所以可用反证法.

若取 $x_{1k} = \frac{1}{k\pi}$, 则 $\frac{1}{x_{1k}^2} \sin \frac{1}{x_{1k}} = (k\pi)^2 \sin k\pi = 0$,

$$x_{2k} = \frac{1}{(2k + \frac{1}{2})\pi}, \text{ 则 } \frac{1}{x_{2k}^2} \sin \frac{1}{x_{2k}} = (2k + \frac{1}{2})^2 \pi^2, (k = 1, 2, \dots).$$

因此, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有 $x_{1k} \rightarrow 0$ 及 $x_{2k} \rightarrow 0$, 但变量 $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 或等于 0 或趋于 $+\infty$, 这表明当 $x \rightarrow 0$ 时它是无界的, 但不是无穷大量, 即 (D) 选项正确.

(2) 【答案】(A)

【解析】利用函数连续定义判定, 即如果函数在 x_0 处连续, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

由题可知

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x^2}{x - 1} = -\lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = -2.$$

因 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处左右极限不相等, 故在 $x = 1$ 处不连续, 因此选 (A).

(3) 【答案】(D)

【解析】这是分段函数求定积分.

当 $0 \leq x < 1$ 时, $0 \leq t \leq x \leq 1$, 故 $f(t) = t^2$, 所以

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x t^2 dt = \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_1^x = \frac{1}{3} (x^3 - 1).$$

当 $1 \leq x \leq 2$ 时, $1 \leq t \leq x \leq 2$, 故 $f(t) = 1$, 所以

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x 1 dt = [t]_1^x = x - 1.$$

应选 (D).

(4) 【答案】(B)

【解析】判定函数 $f(x)$ 零点的个数等价于判定函数 $y = f(x)$ 与 x 的交点个数.

对函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 两边对 x 求导, 得 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$.

令 $f'(x) = 0$, 解得唯一驻点 $x = e$,

即
$$\begin{cases} f'(x) > 0, 0 < x < e; f(x) \text{ 严格单调增加,} \\ f'(x) < 0, e < x < +\infty; f(x) \text{ 严格单调减少,} \end{cases}$$

所以 $x = e$ 是极大值点, 也是最大值点, 最大值为 $f(e) = \ln e - \frac{e}{e} + k = k > 0$.

又因为
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - \frac{x}{e} + k) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - \frac{x}{e} + k) = -\infty \end{cases},$$

由连续函数的介值定理知在 $(0, e)$ 与 $(e, +\infty)$ 各有且仅有一个零点(不相同).

故函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点个数为 2, 选项(B) 正确.

(5) 【答案】(C)

【解析】方法一: 由几何图形判断.

由 $f(x) = -f(-x)$, 知 $f(x)$ 为奇函数, 图形关于原点对称;

在 $(0, +\infty)$ 内 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, $f(x)$ 图形单调增加且向上凹,

根据图可以看出 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内增加而凸, $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, 选(C).

方法二: 用代数法证明.

对恒等式 $f(x) = -f(-x)$ 两边求导, 得

$$f'(x) = f'(-x), f''(x) = -f''(-x).$$

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, 有 $-x \in (0, +\infty)$, 所以

$$f'(x) = f'(-x) > 0, f''(x) = -f''(-x) < 0,$$

故应选(C).

三、(本题共 5 小题, 每小题 5 分, 满分 25 分.)

(1) 【解析】 $y' = \{\sin[f(x^2)]\}' = \cos[f(x^2)] \cdot f'(x^2) \cdot 2x,$

$$\begin{aligned} y'' &= \{\cos[f(x^2)] \cdot f'(x^2) \cdot 2x\}' \\ &= \{\cos[f(x^2)]\}' \cdot f'(x^2) \cdot 2x + \cos[f(x^2)] \cdot [f'(x^2)]' \cdot 2x \\ &\quad + \cos[f(x^2)] \cdot f'(x^2) \cdot (2x)' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\sin[f(x^2)] \cdot [f'(x^2)]^2 \cdot (2x)^2 + \cos[f(x^2)] \cdot f''(x^2) \cdot (2x)^2 \\
&\quad + \cos[f(x^2)] \cdot f'(x^2) \cdot 2.
\end{aligned}$$

【相关知识点】复合函数求导法则:

如果 $u = g(x)$ 在点 x 可导, 而 $y = f(u)$ 在点 $u = g(x)$ 可导, 则复合函数 $y = f[g(x)]$ 在点 x 可导, 且其导数为

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

(2) **【解析】** 应先化简再求函数的极限,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2+100}+x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(\sqrt{x^2+100}+x) \cdot (\sqrt{x^2+100}-x)}{\sqrt{x^2+100}-x} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{100}{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x^2+100}-1}.
\end{aligned}$$

因为 $x < 0$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{100}{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x^2+100}-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{100}{-\sqrt{1+100x^{-2}}-1} = \frac{100}{-1-1} = -50.$$

(3) **【解析】** 先进行恒等变形, 再利用基本积分公式和分部积分法求解.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sec^2 x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x d \tan x \\
&= \frac{1}{2} \left[x \tan x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos x} d \cos x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \left[\ln(\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \left[\ln\left(\cos \frac{\pi}{4}\right) - \ln(\cos 0) \right] = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2.
\end{aligned}$$

(4) **【解析】** 用极限法求广义积分.

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{(1+x)-1}{(1+x)^3} dx = \int_0^{+\infty} [(1+x)^{-2} - (1+x)^{-3}] d(1+x) \\
&= \left[-(1+x)^{-1} + \frac{1}{2}(1+x)^{-2} \right]_0^{+\infty} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{2x+1}{2(x+1)^2} \right]_0^b
\end{aligned}$$

$$= -\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{2b+1}{2(b+1)^2} + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(5) 【解析】所给方程是一阶线性非齐次微分方程, 其标准形式是

$$y' + \frac{2x}{x^2-1}y = \frac{\cos x}{x^2-1}, \quad x^2-1 \neq 0,$$

通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{2x}{x^2-1} dx} \left[\int \frac{\cos x}{x^2-1} e^{\int \frac{2x}{x^2-1} dx} dx + C \right] \\ &= e^{-\int \frac{d(x^2-1)}{x^2-1}} \left[\int \frac{\cos x}{x^2-1} e^{\int \frac{d(x^2-1)}{x^2-1}} dx + C \right] \\ &= \frac{1}{x^2-1} \left[\int \cos x dx + C \right] = \frac{\sin x + C}{x^2-1}. \end{aligned}$$

代入初始条件 $y|_{x=0} = 1$, 得 $\frac{\sin 0 + C}{0^2-1} = 1$, 所以 $C = -1$. 所求特解为 $y = \frac{\sin x - 1}{x^2-1}$.

【相关知识点】一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的通解公式为:

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left(\int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C \right), \text{ 其中 } C \text{ 为常数.}$$

四、(本题满分 9 分)

【解析】要确定常数 α, β, γ , 只需将特解代入原微分方程后, 用比较系数法即得.

对于特解 $y = e^{2x} + (1+x)e^x$, 有

$$y' = 2e^{2x} + e^x + (1+x)e^x = 2e^{2x} + (2+x)e^x,$$

$$y'' = [2e^{2x} + (2+x)e^x]' = 4e^{2x} + e^x + (2+x)e^x = 4e^{2x} + (3+x)e^x,$$

代入方程 $y'' + \alpha y' + \beta y = \gamma e^x$, 得恒等式

$$[4e^{2x} + (3+x)e^x] + \alpha [2e^{2x} + (2+x)e^x] + \beta [e^{2x} + (1+x)e^x] = \gamma e^x,$$

化简得

$$(4+2\alpha+\beta)e^{2x} + (3+2\alpha+\beta)e^x + (1+\alpha+\beta)xe^x \equiv \gamma e^x,$$

比较同类项系数, 得

$$\begin{cases} 4+2\alpha+\beta=0 \\ 3+2\alpha+\beta=\gamma, \\ 1+\alpha+\beta=0 \end{cases}$$

解之得 $\alpha = -3, \beta = 2, \gamma = -1$.

于是原方程为 $y'' - 3y' + 2y = -e^x$, 所对应的齐次微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的特征方程为 $r^2 - 3r + 2 = 0$, 解之得 $r_1 = 1, r_2 = 2$.

所以微分方程 $y'' - 3y' + 2y = -e^x$ 的通解为

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + y^* = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^{2x} + (1+x)e^x = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x e^x.$$

五、(本题满分 9 分)

【解析】利用定积分求旋转体的体积, 用微元法.

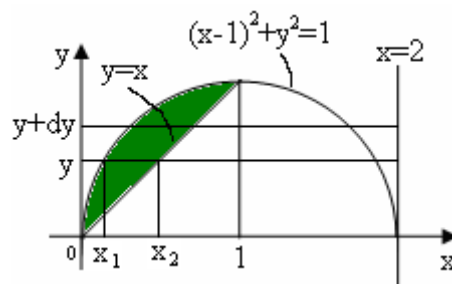
$$x^2 + y^2 \leq 2x \text{ 等价于 } (x-1)^2 + y^2 \leq 1.$$

解法一: 考虑对 y 的积分, 则边界线为

$$x_1 = 1 - \sqrt{1-y^2} \text{ 与 } x_2 = y (0 \leq y \leq 1),$$

如右图所示. 当 $y \rightarrow y + dy$ 时,

$$\begin{aligned} dV &= \pi(2-x_1)^2 dy - \pi(2-x_2)^2 dy \\ &= \pi \left[(2-1+\sqrt{1-y^2})^2 - (2-y)^2 \right] dy \\ &= 2\pi \left[\sqrt{1-y^2} - (1-y)^2 \right] dy. \end{aligned}$$



$$\text{所以 } V = 2\pi \int_0^1 \left[\sqrt{1-y^2} - (1-y)^2 \right] dy.$$

对于 $\int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy$, 令 $y = \sin t$, 则 $dy = \cos t dt$, 所以

$$\int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4};$$

$$\text{对于 } \int_0^1 (1-y)^2 dy = -\int_0^1 (1-y)^2 d(1-y) = -\left[\frac{(1-y)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3},$$

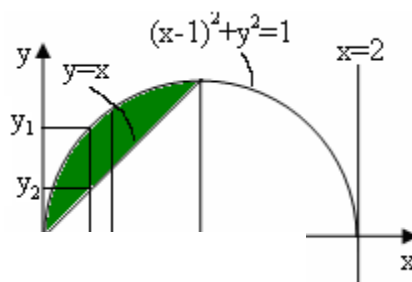
$$\text{所以 } V = 2\pi \int_0^1 \left[\sqrt{1-y^2} - (1-y)^2 \right] dy = 2\pi \left(\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{3} \right).$$

解法二: 取 x 为积分变量, 则边界线为

$$y_1 = \sqrt{2x-x^2} \text{ 与 } y_2 = x (0 \leq x \leq 1),$$

如右图所示.

当 $x \rightarrow x + dx$ 时,



$$\begin{aligned} dV &= 2\pi(2-x)(y_1-y_2)dx \\ &= 2\pi(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)dx, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } V = 2\pi \int_0^1 (2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)dx.$$

令 $x-1=t$, 则 $x=1+t, dx=dt$, 所以

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)dx \\ &= \int_{-1}^0 (1-t) \left[\sqrt{2(1+t)} - (1+t) \right] dt = \int_{-1}^0 \left[\sqrt{1-t^2} - t\sqrt{1-t^2} + t^2 - 1 \right] dt. \end{aligned}$$

再令 $t = \sin \theta$, 则 $dt = \cos \theta d\theta$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } & \int_{-1}^0 \left[\sqrt{1-t^2} - t\sqrt{1-t^2} + t^2 - 1 \right] dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (\cos \theta - \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta - 1) \cos \theta d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 \theta d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin \theta \cos^2 \theta d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 \theta \cos \theta d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (1 + \cos 2\theta) d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 \theta d \cos \theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 \theta d \sin \theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 + \left[\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 + \left[\frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 - [\sin \theta]_{-\frac{\pi}{2}}^0 \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } V = 2\pi \int_0^1 (2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)dx = 2\pi \left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{3} \right).$$

六、(本题满分9分)

【解析】这是一个将立体几何问题转化为函数求最值的问题.

设圆锥底半径为 R , 如图, $BC = R, AC = h, OD = r$.

$$\text{由 } \frac{BC}{AC} = \frac{OD}{AD}, AD = \sqrt{OA^2 - OD^2}, \text{ 有}$$

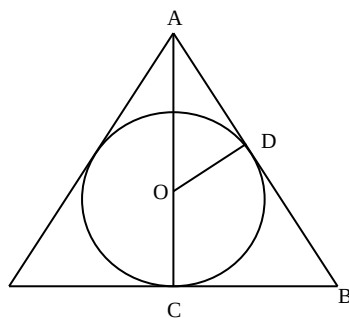
$$\frac{R}{h} = \frac{r}{\sqrt{(h-r)^2 - r^2}} \Rightarrow R = \frac{hr}{\sqrt{h^2 - 2hr}}.$$

于是圆锥体积

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi r^2 \frac{h^2}{h-2r} (2r < h < +\infty).$$

对上式两端对 h 求导, 并令 $V' = 0$, 得

$$V'_h = \frac{1}{3} \pi r^2 \frac{2h(h-2r) - h^2}{(h-2r)^2} = \frac{1}{3} \pi r^2 \frac{h(h-4r)}{(h-2r)^2} = 0,$$



得唯一驻点 $h = 4r$, 且

$$\begin{cases} 2r < h < 4r, V' < 0 \\ 4r < h < +\infty, V' > 0 \end{cases},$$

所以 $h = 4r$ 为极小值点也是最小值点, 最小体积 $V(4r) = \frac{8}{3}\pi r^3$.

七、(本题满分 9 分)

【解析】首先应简化不等式, 从中发现规律.

当 $x > 0$, 常数 $a > e$ 时, 原不等式两边取自然对数可化为

$$a \ln(a+x) < (a+x) \ln a \quad \text{或} \quad \frac{\ln(a+x)}{a+x} < \frac{\ln a}{a}.$$

证法一: 令 $f(x) = (a+x) \ln a - a \ln(a+x)$, 则 $f'(x) = \ln a - \frac{a}{a+x}$.

由 $a > e, x > 0$, 知 $\ln a > 1, \frac{a}{a+x} < 1$, 故 $f'(x) > 0 (x > 0)$.

从而 $f(x)$ 为严格单调递增函数, 且

$$f(x) = (a+x) \ln a - a \ln(a+x) > f(0) = a \ln a - a \ln a = 0, (x > 0)$$

即 $(a+x) \ln a - a \ln(a+x) > 0$,

所以 $(a+x)^a < a^{a+x}$.

证法二: 令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.

当 $x > a > e$ 时, 有 $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$,

所以函数在 $x > a > e$ 为严格单调递减函数, 即 $f(x+a) < f(a)$,

所以有 $\frac{\ln(a+x)}{a+x} < \frac{\ln a}{a}$,

即 $(a+x)^a < a^{a+x}$.

八、(本题满分 9 分)

【解析】证法一: 用微分中值定理.

对任意给定的 $x \in [0, a]$, 由拉格朗日中值定理, 得

$$f(x) = f(0) + f'(\xi)x, (0 < \xi < x)$$

由 $f(0) = 0$, 知 $f(x) = f'(\xi)x$. 因为 $M = \max_{0 \leq x \leq a} |f'(x)|$, 所以

$$|f(x)| = |f'(\xi)|x \leq Mx,$$

将两边从 $0 \rightarrow a$ 做 x 的定积分, 有

$$\int_0^a |f(x)| dx \leq M \int_0^a x dx = \frac{Ma^2}{2}.$$

由定积分的基本性质可知 $|\int_0^a f(x) dx| \leq \int_0^a |f(x)| dx \leq \frac{Ma^2}{2}.$

证法二: 用牛顿-莱布尼茨公式.

对任意给定的 $x \in [0, a]$, 以及 $f(0) = 0$, 可知

$$\int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0) = f(x),$$

从而 $|f(x)| \leq \int_0^x |f'(t)| dt \leq Mx,$

以下同证法一.

证法三: 分部积分法.

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x) dx &= \int_0^a f(x) d(x-a) = [f(x)(x-a)]_0^a + \int_0^a (a-x) f'(x) dx \\ &= [f(a)(a-a) - f(0)(0-a)] + \int_0^a (a-x) f'(x) dx = \int_0^a (a-x) f'(x) dx. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \left| \int_0^a f(x) dx \right| &= \left| \int_0^a (a-x) f'(x) dx \right| \leq \int_0^a (a-x) |f'(x)| dx \leq M \int_0^a (a-x) dx \\ &= M \left[ax - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^a = \frac{1}{2} Ma^2. \end{aligned}$$