

1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题(本题共 5 个小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

(1) 【答案】 $\frac{1}{6}$

【解析】原式变形后为 “ $\frac{0}{0}$ ” 型的极限未定式, 又分子分母在点 0 处导数都存在, 所以连续应用两次洛必达法则, 有

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x(x - \sin x)}{x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}. \quad (\text{由重要极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1)\end{aligned}$$

(2) 【答案】 $2x + y - 4 = 0$

【解析】所求平面的法向量 n 为平行于所给曲面在点 $(1, 2, 0)$ 处法线方向的方向向量 l , 取 $n = l$, 又平面过已知点 $M(1, 2, 0)$.

已知平面的法向量 (A, B, C) 和过已知点 (x_0, y_0, z_0) 可唯一确定这个平面:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

因点 $(1, 2, 0)$ 在曲面 $F(x, y, z) = 0$ 上. 曲面方程 $F(x, y, z) = z - e^z + 2xy - 3$.

曲面在该点的法向量

$$n = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\} \bigg|_{(1, 2, 0)} = \{2y, 2x, 1 - e^z\} \bigg|_{(1, 2, 0)} = \{4, 2, 0\} = 2\{2, 1, 0\},$$

故切平面方程为 $2(x - 1) + (y - 2) = 0$, 即 $2x + y - 4 = 0$.

(3) 【答案】 $\frac{\pi^2}{e^2}$

【解析】由于混合偏导数在连续条件下与求导次序无关, 为了简化运算, 所以本题可以先求 $\frac{\partial u}{\partial y}$, 再求 $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{x}{y^2} e^{-x} \cos \frac{x}{y}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \bigg|_{(2, \frac{1}{\pi})} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \bigg|_{(2, \frac{1}{\pi})} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \bigg|_{y=\frac{1}{\pi}} \right) \bigg|_{x=2} = \frac{\partial}{\partial x} (-\pi^2 x e^{-x} \cos \pi x) \bigg|_{x=2}\end{aligned}$$

$$= (-\pi^2 e^{-x} (1-x) \cos \pi x) \Big|_{x=2} + 0 = \frac{\pi^2}{e^2}.$$

(可边代值边计算, 这样可以简化运算量.)

【相关知识点】多元复合函数求导法则: 如果函数 $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ 都在点 (x, y) 具

有对 x 及对 y 的偏导数, 函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 具有连续偏导数, 则复合函数

$z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ 在点 (x, y) 的两个偏导数存在, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = f'_1 \frac{\partial u}{\partial x} + f'_2 \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = f'_1 \frac{\partial u}{\partial y} + f'_2 \frac{\partial v}{\partial y}.$$

(4) **【答案】** $\frac{\pi}{4} R^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$

【解析】很显然, 根据此题的特征用极坐标变换来计算:

$$\text{原式} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 \left(\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2} \right) r dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2} \right) d\theta \cdot \int_0^R r^3 dr.$$

注意: $\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi,$

则 $\text{原式} = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \pi \cdot \frac{1}{4} R^4 = \frac{\pi}{4} R^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$

(5) **【答案】** $3^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$

【解析】由矩阵乘法有结合律, 注意 $\beta \alpha^T = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 3$ 是一个数,

而 $A = \alpha^T \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix},$ (是一个三阶矩阵)

于是,

$$\begin{aligned} A^n &= (\alpha^T \beta)(\alpha^T \beta)(\alpha^T \beta) \cdots (\alpha^T \beta) = \alpha^T (\beta \alpha^T)(\beta \alpha^T) \cdots (\beta \alpha^T) \beta \\ &= 3^{n-1} \alpha^T \beta = 3^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

二、选择题(本题共 5 个小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

(1) 【答案】(D)

【解析】对于关于原点对称的区间上的积分, 应该关注被积函数的奇偶性.

由对称区间上奇偶函数积分的性质, 被积函数是奇函数, 积分区间关于原点对称, 则积分为 0, 故 $M = 0$, 且

由定积分的性质, 如果在区间 $[a, b]$ 上, 被积函数 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ ($a < b$).

所以 $N = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx > 0$, $P = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = -N < 0$.

因而 $P < M < N$, 应选 (D).

(2) 【答案】(D)

【解析】 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续不能保证 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 存在偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$. 反之, $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 存在这两个偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$ 也不能保证 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续, 因此应选 (D).

二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处两个偏导数存在和在点 (x_0, y_0) 处连续并没有相关性.

(3) 【答案】(C)

【解析】考查取绝对值后的级数. 因

$$\left| \frac{(-1)^n |a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}} \right| \leq \frac{1}{2} a_n^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{n^2 + \lambda} < \frac{1}{2} a_n^2 + \frac{1}{2n^2},$$

(第一个不等式是由 $a \geq 0, b \geq 0, ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ 得到的.)

又 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ 收敛, (此为 p 级数: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛; 当 $p \leq 1$ 时发散.)

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_n^2 + \frac{1}{2n^2}$ 收敛, 由比较判别法, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n |a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}} \right|$ 收敛.

故原级数绝对收敛, 因此选 (C).

(4) 【答案】 (D)

【解析】 因为 $1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2 = o(x), 1 - e^{-x^2} \sim x^2 = o(x)$,

故 $a \tan x + b(1 - \cos x) \sim ax \quad (a \neq 0),$

$c \ln(1 - 2x) + d(1 - e^{-x^2}) \sim -2cx \quad (c \neq 0),$

因此, 原式左边 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{-2cx} = \frac{a}{-2c} = 2 =$ 原式右边, $\Rightarrow a = -4c.$

当 $a = 0, c \neq 0$ 时, 极限为 0;

当 $a \neq 0, c = 0$ 时, 极限为 ∞ , 均与题设矛盾, 应选 (D).

【相关知识】 1. 无穷小的比较:

设在同一个极限过程中, $\alpha(x), \beta(x)$ 为无穷小且存在极限 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = l.$

(1) 若 $l \neq 0$, 称 $\alpha(x), \beta(x)$ 在该极限过程中为同阶无穷小;

(2) 若 $l = 1$, 称 $\alpha(x), \beta(x)$ 在该极限过程中为等价无穷小, 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x);$

(3) 若 $l = 0$, 称在该极限过程中 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小, 记为

$$\alpha(x) = o(\beta(x)).$$

若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 不存在 (不为 ∞), 称 $\alpha(x), \beta(x)$ 不可比较.

2. 无穷小量的性质: 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x), \beta(x)$ 为无穷小, 则

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \Leftrightarrow \alpha(x) = \beta(x) + o(\beta(x)).$$

(5) 【答案】 (C)

【解析】 这一类题目应当用观察法. 若不易用观察法时可转为计算行列式.

(A): 由于 $(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 + \alpha_4) - (\alpha_4 + \alpha_1) = 0$, 所以 (A) 线性相关.

(B): 由于 $(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_4) + (\alpha_4 - \alpha_1) = 0$, 所以 (B) 线性相关.

对于 (C), 实验几组数据不能得到 0 时, 应立即计算由 α 的系数构成的行列式, 即

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

由行列式不为 0, 知道 (C) 线性无关. 故应选 (C).

当然, 在处理 (C) 有困难时, 也可来看 (D), 由

$$(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_4) + (\alpha_4 - \alpha_1) = 0,$$

知 (D) 线性相关, 于是用排除法可确定选 (C).

【相关知识点】 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关的充分必要条件是存在某 $\alpha_i (i=1, 2, \dots, s)$ 可以由

$\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_s$ 线性表出.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是任意一个 $\alpha_i (i=1, 2, \dots, s)$ 均不能由

$\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_s$ 线性表出.

三、(本题共 3 小题, 每小题 5 分, 满分 15 分.)

$$(1) \text{ 【解析】 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\cos t^2 - 2t^2 \sin t^2 - \frac{1}{2t} \cos t^2 \cdot 2t}{-2t \sin t^2} = t (t > 0),$$

$$\text{同理 } y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{1}{-2t \sin t^2},$$

$$\text{代入参数值 } t = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\text{则 } y'_x \big|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad y''_{xx} \big|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

【相关知识点】 1. 复合函数求导法则: 如果 $u = g(x)$ 在点 x 可导, 而 $y = f(u)$ 在点 $u = g(x)$

可导, 则复合函数 $y = f[g(x)]$ 在点 x 可导, 且其导数为

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

2. 对积分上限的函数的求导公式: 若 $F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x) dx$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 均一阶可导, 则

$$F'(t) = \beta'(t) \cdot f[\beta(t)] - \alpha'(t) \cdot f[\alpha(t)].$$

(2) 【解析】 $f(x) = \frac{1}{4} \ln(1+x) - \frac{1}{4} \ln(1-x) + \frac{1}{2} \arctan x - x$.

先求 $f'(x)$ 的展开式. 将 $f(x)$ 微分后, 可得简单的展开式, 再积分即得原函数的幂级数展开. 所以由

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots, \quad (-1 < x < 1)$$

该级数在端点 $x = \pm 1$ 处的收敛性, 视 α 而定. 特别地, 当 $\alpha = -1$ 时, 有

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \quad (-1 < x < 1)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots, \quad (-1 < x < 1)$$

得 $f'(x) = \frac{1}{4} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{1}{2} \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} - 1$

$$= \frac{1}{1-x^4} - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n} \quad (|x| < 1),$$

积分, 由牛顿-莱布尼茨公式得

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{4n} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \quad (|x| < 1).$$

(3) 【解析】方法 1: 利用三角函数的二倍角公式 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$, 并利用换元积分, 结合拆项法求积分, 得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin 2x + 2 \sin x} &= \int \frac{dx}{2 \sin x (\cos x + 1)} \\ &= \int \frac{\sin x dx}{2 \sin^2 x (\cos x + 1)} \stackrel{\cos x = u}{=} -\frac{1}{2} \int \frac{1}{(1-u)(1+u)^2} du \\ (\because \sin^2 x &= 1 - \cos^2 x) \\ &= -\frac{1}{4} \int \frac{(1+u) + (1-u)}{(1-u)(1+u)^2} du = -\frac{1}{8} \int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} + \frac{2}{(1+u)^2} \right) du \\ &= \frac{1}{8} \left[\ln |1-u| - \ln |1+u| + \frac{2}{(1+u)} \right] + C \\ &= \frac{1}{8} \left[\ln(1 - \cos x) - \ln(1 + \cos x) + \frac{2}{1 + \cos x} \right] + C, \end{aligned}$$

其中 C 为任意常数.

方法 2: 换元 $\cos x = u$ 后, 有

$$\text{原式} = \int \frac{dx}{2 \sin x (\cos x + 1)} = \int \frac{\sin x dx}{2 \sin^2 x (\cos x + 1)} = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{(1-u)(1+u)^2}.$$

用待定系数法将被积函数分解:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-u)(1+u)^2} &= \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} + \frac{D}{(1+u)^2} \\ &= \frac{(A-B)u^2 + (2A-D)u + (A+B+D)}{(1-u)(1+u)^2},\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A-B=0 \\ 2A-D=0 \\ A+B+D=1 \end{cases} \Rightarrow A=B=\frac{1}{4}, D=\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}\text{于是, 原式} &= -\frac{1}{8} \int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} + \frac{2}{(1+u)^2} \right) du = \frac{1}{8} \left[\ln|1-u| - \ln|1+u| + \frac{2}{1+u} \right] + C \\ &= \frac{1}{8} \left[\ln(1-\cos x) - \ln(1+\cos x) + \frac{2}{1+\cos x} \right] + C.\end{aligned}$$

四、(本题满分6分)

【解析】求第二类曲面积分的基本方法:套公式将第二类曲面积分化为第一类曲面积分,再化为二重积分,或用高斯公式转化为求相应的三重积分或简单的曲面积分.

这里曲面块的个数不多,积分项也不多,某些积分取零值,如若 Σ 垂直 yOz 平面,则

$$\iint_{\Sigma} P dydz = 0. \text{化为二重积分时要选择投影平面,注意利用对称性与奇偶性.}$$

先把积分化简后利用高斯公式也很方便的.

方法1: 注意 $\iint_S \frac{z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$, (因为 S 关于 xy 平面对称,被积函数关于 z 轴对称)

$$\text{所以 } I = \iint_S \frac{x dy dz}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

S 由上下底圆及圆柱面组成. 分别记为 S_1, S_2, S_3 . S_1, S_2 与平面 yOz 垂直 $\Rightarrow$

$$\iint_{S_1} \frac{x dy dz}{x^2 + y^2 + z^2} = \iint_{S_2} \frac{x dy dz}{x^2 + y^2 + z^2} = 0.$$

$$\text{在 } S_3 \text{ 上将 } x^2 + y^2 = R^2 \text{ 代入被积表达式 } \Rightarrow I = \iint_{S_3} \frac{x dy dz}{R^2 + z^2}.$$

S_3 在 yz 平面上投影区域为 $D_{yz}: -R \leq y \leq R, -R \leq z \leq R$, 在 S_3 上, $x = \pm \sqrt{R^2 - y^2}$, S_3 关

于 yz 平面对称, 被积函数对 x 为奇函数, 可以推出

$$\begin{aligned} I &= 2 \iint_{D_{yz}} \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{R^2 + z^2} dy dz = 2 \times 2 \times 2 \int_0^R \sqrt{R^2 - y^2} dy \int_0^R \frac{dz}{R^2 + z^2} \\ &= 8 \cdot \frac{\pi}{4} R^2 \cdot \frac{1}{R} \arctan \frac{z}{R} \Big|_0^R = \frac{1}{2} \pi^2 R. \end{aligned}$$

方法 2: S 是封闭曲面, 它围成的区域记为 Ω , 记 $I = \iint_S \frac{x dy dz}{R^2 + z^2}$.

$$\begin{aligned} \text{再用高斯公式得 } I &= \iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{R^2 + z^2} \right) dV = \iiint_{\Omega} \frac{1}{R^2 + z^2} dV = \int_{-R}^R dz \iint_{D(z)} \frac{dx dy}{R^2 + z^2} \\ &= 2\pi R^2 \int_0^R \frac{1}{R^2 + z^2} dz = \frac{1}{2} \pi^2 R \quad (\text{先一后二的求三重积分方法}) \end{aligned}$$

其中 $D(z)$ 是圆域: $x^2 + y^2 \leq R^2$.

【相关知识点】 高斯公式: 设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成, 函数

$P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oiint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy,$$

$$\text{或} \quad \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oiint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS,$$

这里 Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧, $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ 是 Σ 在点 (x, y, z) 处的法向量的方向余弦. 上述两个公式叫做高斯公式.

五、(本题满分 9 分)

【解析】 由全微分方程的条件, 有

$$\frac{\partial}{\partial y} [xy(x+y) - f(x)y] = \frac{\partial}{\partial x} [f'(x) + x^2y],$$

即 $x^2 + 2xy - f(x) = f''(x) + 2xy$, 亦即 $f''(x) + f(x) = x^2$.

因而是初值问题 $\begin{cases} y'' + y = x^2, \\ y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1, \end{cases}$ 的解, 此方程为常系数二阶线性非齐次方程, 对应的

齐次方程的特征方程为 $r^2 + 1 = 0$ 的根为 $r_{1,2} = \pm i$, 原方程右端 $x^2 = e^{0x} \cdot x^2$ 中的 $\lambda = 0$, 不同

于两个特征根, 所以方程有特解形如 $Y = Ax^2 + Bx + C$.

代入方程可求得 $A = 1, B = 0, C = 2$, 则特解为 $x^2 - 2$.

由题给 $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 解得 $f(x) = 2\cos x + \sin x + x^2 - 2$.

$f(x)$ 的解析式代入原方程, 则有

$$[xy^2 + 2y - (2\cos x + \sin x)y]dx + [x^2y + 2x - 2\sin x + \cos x]dy = 0.$$

先用凑微分法求左端微分式的原函数:

$$\left(\frac{1}{2}y^2dx^2 + \frac{1}{2}x^2dy^2\right) + 2(ydx + xdy) - yd(2\sin x - \cos x) - (2\sin x - \cos x)dy = 0,$$

$$d\left(\frac{1}{2}x^2y^2 + 2xy + y(\cos x - 2\sin x)\right) = 0.$$

其通解为 $\frac{1}{2}x^2y^2 + 2xy + y(\cos x - 2\sin x) = C$ 其中 C 为任意常数.

【相关知识点】 1. 二阶线性非齐次方程解的结构: 设 $y^*(x)$ 是二阶线性非齐次方程

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的一个特解. $Y(x)$ 是与之对应的齐次方程

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 的通解, 则 $y = Y(x) + y^*(x)$ 是非齐次方程的通解.

2. 二阶常系数线性齐次方程通解的求解方法: 对于求解二阶常系数线性齐次方程的通解 $Y(x)$, 可用特征方程法求解: 即 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 中的 $P(x)$ 、 $Q(x)$ 均是常数, 方程

变为 $y'' + py' + qy = 0$. 其特征方程写为 $r^2 + pr + q = 0$, 在复数域内解出两个特征根 r_1, r_2 : 分三种情况:

(1) 两个不相等的实数根 r_1, r_2 , 则通解为 $y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$;

(2) 两个相等的实数根 $r_1 = r_2$, 则通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^{r_1x}$;

(3) 一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, 则通解为 $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$. 其中 C_1, C_2 为常数.

3. 对于求解二阶线性非齐次方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的一个特解 $y^*(x)$, 可用待定系数法, 有结论如下:

如果 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$, 则二阶常系数线性非齐次方程具有形如 $y^*(x) = x^k Q_m(x)e^{\lambda x}$

的特解, 其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 相同次数的多项式, 而 k 按 λ 不是特征方程的根、是特征方程的单根或是特征方程的重根依次取 0、1 或 2.

如果 $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + P_n(x) \sin \omega x]$, 则二阶常系数非齐次线性微分方程

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的特解可设为

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos \omega x + R_m^{(2)}(x) \sin \omega x],$$

其中 $R_m^{(1)}(x)$ 与 $R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次多项式, $m = \max\{l, n\}$, 而 k 按 $\lambda + i\omega$ (或 $\lambda - i\omega$) 不是特征方程的根、或是特征方程的单根依次取为 0 或 1.

六、(本题满分 8 分)

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ 表明 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小, 若能进一步确定 $f(x)$ 是 x

的 p 阶或高于 p 阶的无穷小, $p > 1$, 从而 $\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|$ 也是 $\frac{1}{n}$ 的 p 阶或高于 p 阶的无穷小, 这就

证明了级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

方法一: 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ 及 $f(x)$ 的连续性得知 $f(0) = 0, f'(0) = 0$, 再由 $f(x)$ 在点 $x = 0$

的某一领域内具有二阶连续导数以及洛必达法则, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$ 为 “ $\frac{0}{0}$ ” 型的极限未定式, 又分子分母在点 0 处导数都存在, 连续运用两次洛必达法则, 有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{1}{2} f''(0) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x^2} \right| &= \frac{1}{2} |f''(0)|. \end{aligned}$$

由函数极限与数列极限的关系 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} |f''(0)|$.

因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|$ 收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

方法二: 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ 得知 $f(0) = 0, f'(0) = 0$, 可用泰勒公式来实现估计. $f(x)$ 在点 $x = 0$ 有泰勒公式:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(\theta x) x^2 = \frac{1}{2} f''(\theta x) x^2 \quad (0 < \theta < 1, x \in [-\delta, \delta])$$

因 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 的某一领域内具有二阶连续导数,

$\Rightarrow \exists \delta > 0, f''(x)$ 在 $x \in [-\delta, \delta]$ 有界, 即 $\exists M > 0$, 有 $|f''(x)| \leq M, x \in [-\delta, \delta]$

$$\Rightarrow |f(x)| = \frac{1}{2} |f''(\theta x)| x^2 \leq \frac{1}{2} M x^2, x \in [-\delta, \delta].$$

$$\text{对此 } \delta > 0, \exists N, n > N \text{ 时, } 0 < \frac{1}{n} < \delta \Rightarrow \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \frac{1}{2} M \frac{1}{n^2}.$$

$$\text{又 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \text{ 收敛, 即 } \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ 绝对收敛.}$$

【相关知识点】 正项级数的比较判别法:

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = A$, 则

(1) 当 $0 < A < +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散;

(2) 当 $A = 0$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

(3) 当 $A = +\infty$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

七、(本题满分 6 分)

【解析】方法 1: 用定积分.

设高度为 z 处的截面 D_z 的面积为 $S(z)$, 则所求体积 $V = \int_0^1 S(z) dz$.

A, B 所在的直线的方向向量为 $(0-1, 1-0, 1-0) = (-1, 1, 1)$, 且过 A 点,

$$\text{所以 } A, B \text{ 所在的直线方程为 } \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = 1-z \\ y = z \end{cases}.$$

截面 D_z 是个圆形, 其半径的平方 $R^2 = x^2 + y^2 = (1-z)^2 + z^2$, 则面积

$$S(z) = \pi R^2 = \pi[(1-z)^2 + z^2],$$

$$\text{由此} \quad V = \int_0^1 \pi[(1-z)^2 + z^2] dz = \pi \int_0^1 (1-2z+2z^2) dz = \pi \left(z - z^2 + \frac{2}{3} z^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$$

方法 2: 用三重积分.

$$V = \iiint_{\Omega} dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{(1-z)^2 + z^2}} r dr = \frac{2\pi}{3},$$

或者

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dV = \int_0^1 dz \iint_{D_z} d\sigma = \int_0^1 \pi[(1-z)^2 + z^2] dz \\ &= \pi \int_0^1 (1-2z+2z^2) dz \\ &= \pi \left(z - z^2 + \frac{2}{3} z^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

八、(本题满分 8 分)

【解析】(1) 由已知, (I) 的系数矩阵, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

由于 $n-r(A)=2$, 所以解空间的维数是 2.

取 x_3, x_4 为自由变量, 分别令 $(x_3, x_4) = (1, 0), (0, 1)$, 求出 $Ax=0$ 的解.

故 (I) 的基础解系可取为 $(0, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 1)$.

(2) 方程组 (I) 和 (II) 有非零公共解.

将 (II) 的通解 $x_1 = -k_2, x_2 = k_1 + 2k_2, x_3 = k_1 + 2k_2, x_4 = k_2$ 代入方程组 (I), 则有

$$\begin{cases} -k_2 + k_1 + 2k_2 = 0 \\ k_1 + 2k_2 - k_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow k_1 = -k_2.$$

那么当 $k_1 = -k_2 \neq 0$ 时, 向量 $k_1(0, 1, 1, 0) + k_2(-1, 2, 2, 1) = k_1(1, -1, -1, -1)$ 是 (I) 与 (II) 的非零公共解.

九、(本题满分 6 分)

【解析】证法一: 由于 $A^* = A^T$, 根据 A^* 的定义有

$$A_{ij} = a_{ij} (\forall i, j = 1, 2, \dots, n), \text{ 其中 } A_{ij} \text{ 是行列式 } |A| \text{ 中 } a_{ij} \text{ 的代数余子式.}$$

由于 $A \neq 0$, 不妨设 $a_{ij} \neq 0$, 那么

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{in}^2 \geq a_{ij}^2 > 0,$$

故 $|A| \neq 0$.

证法二: (反证法) 若 $|A| = 0$, 则 $AA^* = AA^T = |A|E = 0$.

设 A 的行向量为 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 则 $\alpha_i \alpha_i^T = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{in}^2 = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$.

于是 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$.

进而有 $A = 0$, 这与 A 是非零矩阵相矛盾. 故 $|A| \neq 0$.

十、填空题(本题共 2 小题, 每小题 3 分, 满分 6 分.)

(1) 【解析】利用随机事件的概率运算性质进行化简. 由概率的基本公式(广义加法公式), 有

$$\begin{aligned} P(\overline{AB}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)] \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(AB). \end{aligned}$$

因题目已知 $P(AB) = P(\overline{AB})$, 故有

$$P(A) + P(B) = 1, \quad P(B) = 1 - P(A) = 1 - p.$$

(2) 【解析】由于 X 、 Y 相互独立且同分布, 只能取 0、1 两个数值, 易见随机变量

$Z = \max\{X, Y\}$ 只取 0 与 1 两个可能的值, 且

$$\begin{aligned} P\{Z = 0\} &= P\{\max\{X, Y\} = 0\} = P\{X = 0, Y = 0\} = P\{X = 0\} \cdot P\{Y = 0\} = \frac{1}{4}, \\ P\{Z = 1\} &= 1 - P\{Z = 0\} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

所以随机变量 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布律为:

Z	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

十一、(本题满分 6 分)

【解析】此题的第一小问是求数学期望 $E(Z)$ 和方差 $D(Z)$, 是个常规问题; (2) 求相关系数

ρ_{XZ} , 关键是计算 X 与 Z 的协方差; (3) 考查相关系数为零与相互独立是否等价.

(1) 由 $X \sim N(1, 3^2)$, $Y \sim N(0, 4^2)$, 知

$$E(X) = 1, D(X) = 9, E(Y) = 0, D(Y) = 16.$$

由数学期望和方差的性质:

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c,$$

$$D(aX + bY + c) = a^2D(X) + b^2D(Y) + 2ab\text{Cov}(X, Y),$$

其中 a, b, c 为常数.

得
$$\begin{aligned}EZ &= \frac{1}{3}EX + \frac{1}{2}EY = \frac{1}{3}, \\DZ &= \frac{1}{9}DX + \frac{1}{4}DY + \frac{1}{3}\text{Cov}(X, Y) \\&= \frac{1}{9} \times 9 + \frac{1}{4} \times 16 + \frac{1}{3} \rho_{XY} \cdot \sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)} \\&= 5 + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 3 \times 4 = 3.\end{aligned}$$

(2) 因为 $\text{Cov}(X, Z) = \text{Cov}\left(X, \frac{1}{3}X + \frac{1}{2}Y\right)$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{3}\text{Cov}(X, X) + \frac{1}{2}\text{Cov}(X, Y) \\&= \frac{1}{3} \cdot 3^2 + \frac{1}{2}(-6) = 0\end{aligned}$$

所以
$$\rho_{XZ} = \frac{\text{Cov}(X, Z)}{\sqrt{DX}\sqrt{DZ}} = 0.$$

(3) 由于 (X, Y) 服从二维正态分布, 则其线性组合构成的随机变量也服从二维正态分布, 而

$Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}$, $X = X + 0Y$, 故 X 和 Z 都是其线性组合, 则 (X, Z) 服从二维正态分布, 根据

$$\rho_{XZ} = \frac{\text{Cov}(X, Z)}{\sqrt{DX}\sqrt{DZ}} = 0, \text{ 所以 } X \text{ 与 } Z \text{ 是相互独立的.}$$