

1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题解析

一、填空题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

(1) 【答案】 $\ln 3$

【解析】利用被积函数的奇偶性, 当积分区间关于原点对称, 被积函数为奇函数时, 积分为 0; 被积函数为偶函数时, 可以化为二倍的半区间上的积分. 所以知

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_{-2}^2 \frac{x}{2+x^2} dx + \int_{-2}^2 \frac{|x|}{2+x^2} dx = 2 \int_0^2 \frac{x}{2+x^2} dx \\ &= \int_0^2 \frac{1}{2+x^2} dx^2 \\ &= \ln(2+x^2) \Big|_0^2 = \ln 6 - \ln 2 = \ln 3.\end{aligned}$$

(2) 【答案】 1

【解析】根据导数的定义, 有 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

所以由此题极限的形式可构造导数定义的形式, 从而求得极限值. 由于

$$\begin{aligned}& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2x) - f(x_0 - x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2x) - f(x_0) - f(x_0 - x) + f(x_0)}{x} \\ &= (-2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2x) - f(x_0)}{-2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - x) - f(x_0)}{-x} = -2 f'(x_0) + f'(x_0) = 1.\end{aligned}$$

所以 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x_0 - 2x) - f(x_0 - x)} = \frac{1}{1} = 1$.

(3) 【答案】 $y' = -\frac{ye^{xy} + \sin x}{xe^{xy} + 2y}$

【解析】将方程 $e^{xy} + y^2 = \cos x$ 看成关于 x 的恒等式, 即 y 看作 x 的函数.

方程两边对 x 求导, 得

$$e^{xy}(y + xy') + 2yy' = -\sin x \Rightarrow y' = -\frac{ye^{xy} + \sin x}{xe^{xy} + 2y}.$$

【相关知识点】两函数乘积的求导公式: $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

(4) 【答案】
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{bmatrix}$$

【解析】由分块矩阵求逆的运算性质, 有公式 $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix},$

且
$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}$$

所以, 本题对 A 分块后可得 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{bmatrix}.$

(5) 【答案】 $\frac{9}{64}$

【解析】已知随机变量 X 的概率密度, 所以概率 $P\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\} = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x dx = \frac{1}{4},$ 求得二项分布的概率参数后, 故 $Y \sim B(3, \frac{1}{4}).$

由二项分布的概率计算公式, 所求概率为 $P\{Y=2\} = C_3^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{64}.$

【相关知识点】二项分布的概率计算公式:

若 $Y \sim B(n, p)$, 则 $P\{Y = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$,

二、选择题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

(1) 【答案】(B)

【解析】本题是关于求渐近线的问题.

由于
$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)(x-2)} = \frac{\pi}{4},$$

故 $y = \frac{\pi}{4}$ 为该曲线的一条水平渐近线.

又
$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)(x-2)} = \infty.$$

故 $x = 0$ 为该曲线的一条垂直渐近线, 所以该曲线的渐近线有两条.

故本题应选(B).

【相关知识点】水平渐近线: 若有 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, 则 $y = a$ 为水平渐近线;

铅直渐近线: 若有 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, 则 $x = a$ 为铅直渐近线;

斜渐近线: 若有 $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$ 存在且不为 ∞ , 则 $y = ax + b$ 为斜渐近线.

(2) 【答案】(C)

【解析】考查取绝对值后的级数. 因

$$\left| \frac{(-1)^n |a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}} \right| \leq \frac{1}{2} a_n^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{n^2 + \lambda} < \frac{1}{2} a_n^2 + \frac{1}{2n^2},$$

(第一个不等式是由 $a \geq 0, b \geq 0, ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ 得到的.)

又 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ 收敛, (此为 p 级数: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛; 当 $p \leq 1$ 时发散.)

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_n^2 + \frac{1}{2n^2}$ 收敛, 由比较判别法, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n |a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}} \right|$ 收敛.

故原级数绝对收敛, 因此选(C).

(3) 【答案】(C)

【解析】由公式 $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$, 若 A 可逆, 则

$$r(AB) \leq r(B) = r(EB) = r[A^{-1}(AB)] \leq r(AB).$$

从而 $r(AB) = r(B)$, 即可逆矩阵与矩阵相乘不改变矩阵的秩, 所以选(C).

(4) 【答案】(D)

【解析】事实上, 当 $0 < P(B) < 1$ 时, $P(A|B) = P(A|\bar{B})$ 是事件 A 与 B 独立的充分必要条件, 证明如下:

若 $P(A|B) = P(A|\bar{B})$, 则

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A\bar{B})}{1-P(B)}, \quad P(AB) - P(B)P(A\bar{B}) = P(B)P(A\bar{B}),$$

$$P(AB) = P(B) \cdot [P(AB) + P(A\bar{B})] = P(B)P(A),$$

由独立的定义, 即得 A 与 B 相互独立.

若 A 与 B 相互独立, 直接应用乘法公式可以证明 $P(A|B) = P(A|\bar{B})$.

$$P(A|B) = 1 - P(\bar{A}|\bar{B}) = P(A|\bar{B}).$$

由于事件 B 的发生与否不影响事件 A 发生的概率, 直观上可以判断 A 和 B 相互独立. 所以本题选(D).

(5) 【答案】(B)

【解析】由于 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 根据抽样分布知识与 t 分布的应用模式可知

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1), \quad \text{其中 } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \quad \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} \sim t(n-1).$$

即

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S_2}{\sqrt{n-1}}} \sim t(n-1).$$

因为 t 分布的典型模式是: 设 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$, 且 X, Y 相互独立, 则随机变量

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \text{ 服从自由度为 } n \text{ 的 } t \text{ 分布, 记作 } T \sim t(n).$$

因此应选(B).

三、(本题满分6分)

【解析】方法1: 由 $x^2 + y^2 \leq x + y + 1$, 配完全方得 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{2}$.

令 $x - \frac{1}{2} = r \cos \theta, y - \frac{1}{2} = r \sin \theta$, 引入极坐标系 (r, θ) , 则区域为

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \right\}.$$

故

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y) dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} (1 + r \cos \theta + r \sin \theta) \cdot r dr \\ &= \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^{2\pi} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} (\sin \theta - \cos \theta) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

方法 2: 由 $x^2 + y^2 \leq x + y + 1$, 配完全方得 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{2}$.

引入坐标轴平移变换: $u = x - \frac{1}{2}, v = y - \frac{1}{2}$, 则在新的直角坐标系中区域 D 变为圆域

$$D_1 = \left\{ (u, v) \mid u^2 + v^2 \leq \frac{3}{2} \right\}.$$

而 $x + y = u + v + 1$, 则有 $dx dy = du dv$, 代入即得

$$\iint_D (x+y) dx dy = \iint_{D_1} (u+v+1) du dv = \iint_{D_1} u du dv + \iint_{D_1} v du dv + \iint_{D_1} du dv.$$

由于区域 D_1 关于 v 轴对称, 被积函数 u 是奇函数, 从而 $\iint_{D_1} u du dv = 0$.

同理可得 $\iint_{D_1} v du dv = 0$, 又 $\iint_{D_1} du dv = |D_1| = \frac{3}{2} \pi$,

故 $\iint_D (x+y) dx dy = \frac{3}{2} \pi$.

四、(本题满分 5 分)

【解析】 先解出 $y(x)$, 此方程为常系数二阶线性齐次方程, 用特征方程法求解.

方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$, 解得 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$.

故原方程的通解为 $y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}$.

由初始条件 $y(0) = 2, y'(0) = -4$ 得 $C_1 = 2, C_2 = 0$,

因此, 微分方程的特解为 $y = 2e^{-2x}$.

$$\begin{aligned}\text{再求积分即得} \quad \int_0^{+\infty} y(x)dx &= \int_0^{+\infty} 2e^{-2x} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-2x} d(2x) = \lim_{b \rightarrow +\infty} -e^{-2x} \Big|_0^b = 1.\end{aligned}$$

【相关知识点】 用特征方程法求解常系数二阶线性齐次方程 $y'' + py' + qy = 0$:

首先写出方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的特征方程: $r^2 + pr + q = 0$, 在复数域内解出两个特征根 r_1, r_2 ;

分三种情况:

(1) 两个不相等的实数根 r_1, r_2 , 则通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$;

(2) 两个相等的实数根 $r_1 = r_2$, 则通解为 $y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$;

(3) 一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, 则通解为 $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

其中 C_1, C_2 为常数.

五、(本题满分 5 分)

【解析】 由复合函数求导法, 首先求 $\frac{\partial f}{\partial x}$, 由题设可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \arctan \frac{y}{x} + \frac{x^2}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) - \frac{y^2}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \frac{1}{y} \\ &= 2x \arctan \frac{y}{x} - \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - \frac{y^3}{x^2 + y^2} = 2x \arctan \frac{y}{x} - y.\end{aligned}$$

再对 y 求偏导数即得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2x}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{1}{x} - 1 = \frac{2x^2}{x^2 + y^2} - 1 = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

【相关知识点】 多元复合函数求导法则: 如果函数 $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ 都在点 (x, y) 具

有对 x 及对 y 的偏导数, 函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 具有连续偏导数, 则复合函数

$z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ 在点 (x, y) 的两个偏导数存在, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = f'_1 \frac{\partial u}{\partial x} + f'_2 \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = f'_1 \frac{\partial u}{\partial y} + f'_2 \frac{\partial v}{\partial y}.$$

六、(本题满分 5 分)

【解析】运用换元法, 令 $x^n - t^n = u$, 则

$$F(x) = \int_0^x t^{n-1} f(x^n - t^n) dt = \frac{1}{n} \int_0^{x^n} f(u) du \Rightarrow F'(x) = x^{n-1} f(x^n).$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^{2n}}$ 为 “ $\frac{0}{0}$ ” 型的极限未定式, 又分子分母在点 0 处导数都存在, 运用洛必达法则, 可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^{2n}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{2nx^{2n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{n-1} f(x^n)}{2nx^{2n-1}} \\ &= \frac{1}{2n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^n)}{x^n} = \frac{1}{2n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^n) - f(0)}{x^n - 0}, \end{aligned}$$

由导数的定义, 有 原式 $= \frac{1}{2n} f'(0)$.

【相关知识】对积分上限的函数的求导公式:

若 $F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x) dx$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 均一阶可导, 则

$$F'(t) = \beta'(t) \cdot f[\beta(t)] - \alpha'(t) \cdot f[\alpha(t)].$$

七、(本题满分 8 分)

【解析】利用 (x_0, y_0) 在两条曲线上及两曲线在 (x_0, y_0) 处切线斜率相等列出三个方程, 由此,

可求出 a, x_0, y_0 , 然后利用旋转体体积公式 $\pi \int_a^b f^2(x) dx$ 求出 V_x .

(1) 过曲线上已知点 (x_0, y_0) 的切线方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$, 其中, 当 $y'(x_0)$ 存在时,

$$k = y'(x_0).$$

$$\text{由 } y = a\sqrt{x} \text{ 知 } y' = \frac{a}{2\sqrt{x}}. \text{ 由 } y = \ln \sqrt{x} \text{ 知 } y' = \frac{1}{2x}.$$

$$\text{由于两曲线在 } (x_0, y_0) \text{ 处有公共切线, 可见 } \frac{a}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2x_0}, \text{ 得 } x_0 = \frac{1}{a^2}.$$

将 $x_0 = \frac{1}{a^2}$ 分别代入两曲线方程, 有 $y_0 = a\sqrt{\frac{1}{a^2}} = \ln\sqrt{\frac{1}{a^2}} \Rightarrow y_0 = 1 = \ln\sqrt{\frac{1}{a^2}}$.

于是 $a = \frac{1}{e}, x_0 = \frac{1}{a^2} = e^2$,

从而切点为 $(e^2, 1)$.

(2) 将曲线表成 y 是 x 的函数, V 是两个旋转体的体积之差, 套用旋转体体积公式, 可得旋转体体积为

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^{e^2} \left(\frac{1}{e}\sqrt{x}\right)^2 dx - \pi \int_1^{e^2} (\ln\sqrt{x})^2 dx = \frac{\pi}{2}e^2 - \frac{\pi}{4} \int_1^{e^2} \ln^2 x dx \\ &= \frac{\pi}{2}e^2 - \frac{\pi}{4} \left[x \ln^2 x \Big|_1^{e^2} - 2 \int_1^{e^2} \ln x dx \right] = \frac{\pi}{2}e^2 - \frac{\pi}{2}x \Big|_1^{e^2} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

【相关知识点】 由连续曲线 $y = f(x)$ 、直线 $x = a, x = b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋

转一周所得的旋转体体积为: $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

八、(本题满分 6 分)

【解析】 方法 1:

$$F'(x) = \frac{f'(x)(x-a) - f(x) + f(a)}{(x-a)^2} = \frac{1}{(x-a)^2} [f'(x)(x-a) - f(x) + f(a)],$$

令 $\varphi(x) = f'(x)(x-a) - f(x) + f(a) (x > a)$,

由 $\varphi'(x) = f''(x)(x-a) + f'(x) - f'(x) = (x-a)f''(x) > 0 (x > a)$,

知 $\varphi(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调上升, 于是 $\varphi(x) > \varphi(a) = 0$.

故 $F'(x) = \frac{\varphi(x)}{(x-a)^2} > 0$.

所以 $F(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内单调增加.

$$\text{方法 2: } F'(x) = \frac{f'(x)(x-a) - [f(x) - f(a)]}{(x-a)^2} = \frac{1}{x-a} \left[f'(x) - \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right].$$

由拉格朗日中值定理知 $\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(\xi), (a < \xi < x)$.

于是有 $F'(x) = \frac{1}{x-a} [f'(x) - f'(\xi)]$.

由 $f''(x) > 0$ 知 $f'(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调增, 从而 $f'(x) > f'(\xi)$, 故 $F'(x) > 0$.

于是 $F(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内单调增加.

【相关知识点】1. 分式求导数公式: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

2. 拉格朗日中值定理: 如果函数 $f(x)$ 满足在闭区间 $[a, b]$ 上连续; 在开区间 (a, b) 内可导, 那么在 (a, b) 内至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使等式 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ 成立.

九、(本题满分 11 分)

【解析】(1) 因为增广矩阵 $\bar{A}$ 的行列式是范德蒙行列式, a_1, a_2, a_3, a_4 两两不相等, 则有

$$|\bar{A}| = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3) \neq 0,$$

故 $r(\bar{A}) = 4$. 而系数矩阵 A 的秩 $r(A) = 3$, 所以方程组无解.

(2) 当 $a_1 = a_3 = k, a_2 = a_4 = -k (k \neq 0)$ 时, 方程组同解于

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + k^2x_3 = k^3, \\ x_1 - kx_2 + k^2x_3 = -k^3. \end{cases}$$

因为 $\begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & -k \end{vmatrix} = -2k \neq 0$, 知 $r(A) = r(\bar{A}) = 2$.

由 $n - r(A) = 3 - 2 = 1$, 知导出组 $Ax = 0$ 的基础解系含有 1 个解向量, 即解空间的维数为 1.

由解的结构和解的性质,

$$\eta = \beta_1 - \beta_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ 是 } Ax = 0 \text{ 的基础解系.}$$

于是方程组的通解为 $\beta_1 + k\eta = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, 其中 k 为任意常数.

【相关知识点】1. 非齐次线性方程组有解的判定定理:

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 线性方程组 $Ax = b$ 有解的充分必要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵 $\bar{A} = (A:b)$ 的秩, 即 $r(A) = r(\bar{A})$. (或者说, b 可由 A 的列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出, 亦等同于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, b$ 是等价向量组)

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 线性方程组 $Ax = b$, 则

$$(1) \quad \text{有唯一解} \quad \Leftrightarrow \quad r(A) = r(\bar{A}) = n.$$

$$(2) \quad \text{有无穷多解} \quad \Leftrightarrow \quad r(A) = r(\bar{A}) < n.$$

$$(3) \quad \text{无解} \quad \Leftrightarrow \quad r(A) + 1 = r(\bar{A}).$$

$$\Leftrightarrow \quad b \text{ 不能由 } A \text{ 的列向量 } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ 线性表出.}$$

2. 解的结构: 若 α_1, α_2 是对应齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, 知 $Ax = b$ 的通解形式为 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \xi$, 其中 η_1, η_2 是 $Ax = 0$ 的基础解系, ξ 是 $Ax = b$ 的一个特解.

3. 解的性质: 如果 η_1, η_2 是 $Ax = 0$ 的两个解, 则其线性组合 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2$ 仍是 $Ax = 0$ 的解; 如果 ξ 是 $Ax = b$ 的一个解, η 是 $Ax = 0$ 的一个解, 则 $\xi + \eta$ 仍是 $Ax = b$ 的解.

十、(本题满分 8 分)

【解析】由 A 的特征方程, 按照第二列展开, 有

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -x & \lambda - 1 & -y \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0,$$

得到 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$.

由题设有三个线性无关的特征向量, 因此, $\lambda = 1$ 必有两个线性无关的特征向量, 从而 $r(E - A) = 1$. 这样才能保证方程组 $(E - A)X = 0$ 解空间的维数是 2, 即有两个线性无关的解向量.

由初等行变换, 将 $E - A$ 第一行加到第三行上, 第一行乘以 x 后加到第二行上有

$$E - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 0 & -y \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -x-y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

由 $r(E - A) = 1$, 得 x 和 y 必须满足条件 $x + y = 0$.

十一、(本题满分 8 分)

【解析】记 $Y_1 = X_1X_4, Y_2 = X_2X_3$, 则 $X = Y_1 - Y_2$, 随机变量 Y_1 和 Y_2 相互独立且同分布,

由 A 与 B 独立可得出 $P(AB) = P(A)P(B)$, 故

$$P\{Y_1 = 1\} = P\{X_1X_4 = 1\} = P\{X_1 = 1, X_4 = 1\} = P\{X_1 = 1\} \cdot P\{X_4 = 1\} = 0.16,$$

$$P\{Y_1=0\}=1-P\{Y_1=1\}=0.84.$$

由行列式的计算公式, 随机变量 $X=Y_1-Y_2$, 有三个可能取值: $-1, 0, 1$.

$$P\{X=-1\}=P\{Y_1=0, Y_2=1\}=P\{Y_1=0\}\cdot P\{Y_2=1\}=0.84\times 0.16=0.1344,$$

$$P\{X=1\}=P\{Y_1=1, Y_2=0\}=P\{Y_1=1\}\cdot P\{Y_2=0\}=0.1344,$$

$$P\{X=0\}=1-P\{X=-1\}-P\{X=1\}=0.7312.$$

所求的行列式的概率分布列于下表:

X	-1	0	1
$P\{X=x\}$	0.1344	0.7312	0.1344

十二、(本题满分 8 分)

【解析】依据数学期望的计算公式及一般正态分布的标准化方法, 有

$$\begin{aligned} E(T) &= -P\{X < 10\} + 20P\{10 \leq X \leq 12\} - 5P\{X > 12\} \\ &= -\Phi(10-\mu) + 20[\Phi(12-\mu) - \Phi(10-\mu)] - 5[1 - \Phi(12-\mu)] \\ &= 25\Phi(12-\mu) - 21\Phi(10-\mu) - 5. \end{aligned}$$

此时数学期望依赖于参数 μ , 为使其达到最大值, 令其一阶导数为 0, 有

$$\frac{dE(T)}{d\mu} = -25\varphi(12-\mu) + 21\varphi(10-\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[21e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}} - 25e^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}}],$$

令 $\frac{dE(T)}{d\mu} = 0$, 得 $\frac{21}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}} - \frac{25}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}} = 0$,

即 $\frac{21}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}} = \frac{25}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}}.$

解上面的方程得 $\mu = \mu_0 = 11 - \frac{1}{2} \ln \frac{25}{21} \approx 10.9.$

得到唯一驻点 $\mu = \mu_0 \approx 10.9$, 因为此问题是实际问题, 所以平均利润函数必然有最大值, 而且这个最大值是唯一的.

由题意知, 当 $\mu = \mu_0 \approx 10.9$ 毫米时, 平均利润最大.