

1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

(1) 【答案】 -2

【解析】 $\frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x}$ 在 $x \neq 0$ 时是初等函数, 因而连续; 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连

续, $f(x)$ 在 $x=0$ 处也连续, 这样必有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

由极限的四则混合运算法则和等价无穷小, $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$; $e^{x-1} \sim x$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} + \frac{e^{2ax} - 1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax}{x} = 2 + 2a = a,\end{aligned}$$

从而有 $a = -2$.

(2) 【答案】 $\frac{(t+1)(6t+5)}{t}$

【解析】

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2 + 2t}{1 - \frac{1}{1+t}} = 3t^2 + 5t + 2, \\ y''_{xx} &= \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{6t+5}{1 - \frac{1}{1+t}} = \frac{(t+1)(6t+5)}{t}.\end{aligned}$$

【相关知识点】复合函数求导法则: 如果 $u = g(x)$ 在点 x 可导, 而 $y = f(x)$ 在点 $u = g(x)$ 可

导, 则复合函数 $y = f[g(x)]$ 在点 x 可导, 且其导数为

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

(3) 【答案】 $-3\sin 3xf(\cos 3x)$

【解析】原式 $= f(\cos 3x) \cdot (\cos 3x)' = f(\cos 3x) \cdot (-\sin 3x) \cdot 3 = -3\sin 3xf(\cos 3x)$.

【相关知识点】对积分上限的函数的求导公式:

若 $F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x)dx$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 均一阶可导, 则

$$F'(t) = \beta'(t) \cdot f[\beta(t)] - \alpha'(t) \cdot f[\alpha(t)].$$

(4) 【答案】 $\frac{1}{2}(x^2 - 1)e^{x^2} + C$, 其中 C 为任意常数

【解析】本题利用不定积分的分部积分法求解. 显然是 e^{x^2} 先进入积分号,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{2} \int x^2 d(e^{x^2}) = \frac{1}{2} \left[x^2 e^{x^2} - \int e^{x^2} d(x^2) \right] \\ &= \frac{1}{2} (x^2 - 1) e^{x^2} + C \quad \text{其中 } C \text{ 为任意常数.}\end{aligned}$$

注: 分部积分法的关键是要选好谁先进入积分号的问题, 如果选择不当可能引起更繁杂的计算, 最后甚至算不出结果来. 在做题的时候应该好好总结, 积累经验.

【相关知识点】分部积分公式: 假定 $u = u(x)$ 与 $v = v(x)$ 均具有连续的导函数, 则

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx, \quad \text{或者} \quad \int u dv = uv - \int v du.$$

(5) 【答案】 $(x-4) \cdot y^4 = Cx$, C 为任意常数

【解析】这是可分离变量的方程.

分离变量得 $\frac{dx}{x(x-4)} + \frac{dy}{y} = 0$, 两项分别对 x 和对 y 积分得到

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-4}{x} \right| + \ln |y| = C_1,$$

化简有 $\frac{x-4}{x} \cdot y^4 = C$, 即 $(x-4) \cdot y^4 = Cx$, C 为任意常数.

二、选择题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

(1) 【答案】 (A)

【解析】方法 1: 将极限中的分子用泰勒—皮亚诺公式展开得

$$\begin{aligned}\ln(1+x) - (ax + bx^2) &= \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - (ax + bx^2) \\ &= (1-a)x - \left(\frac{1}{2} + b\right)x^2 + o(x^2),\end{aligned}$$

由假设, 应该有 $\begin{cases} 1-a=0 \\ -(\frac{1}{2}+b)=2 \end{cases}$, 故由此 $a=1, b=-\frac{5}{2}$, 故应选 (A).

方法 2: 用洛必达法则. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2}$ 为 “ $\frac{0}{0}$ ” 型的极限未定式, 又分子分母在

点 0 处导数都存在, 所以,

$$\begin{aligned}
 \text{原式左边} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - a - 2bx}{2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-a) - (a+2b)x - 2bx^2}{2x(1+x)} \quad (\text{若 } 1-a \neq 0, \text{ 则原式极限为 } \infty, \text{ 必有 } 1-a=0) \\
 &= -\frac{1+2b}{2} = 2, \Rightarrow a=1, b=-\frac{5}{2}.
 \end{aligned}$$

故应选 (A).

(2) 【答案】 (B)

【解析】方法 1: 因 $f(x) = \frac{2}{3}x^3, (x \leq 1) \Rightarrow f(x)$ 左可导, $f'_-(1) = \left(\frac{2}{3}x^3 \right)' \Big|_{x=1} = 2$.

又 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1 \neq f(1) \Rightarrow f(x)$ 不右连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $x=1$ 的右导数不存在,

故选 (B).

方法 2: $f(1) = \frac{2}{3}$, 而 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1 \neq f(1)$,

所以, $f(x)$ 在 $x=1$ 点不连续, 故不可导, 但左、右导数可能存在, 这只需要用左、右导数定义进行验证.

$$\begin{aligned}
 f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - \frac{2}{3}}{x-1} = +\infty, \\
 f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}}{x-1} = 2.
 \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 点左导数存在, 但右导数不存在, 故应选 (B).

(3) 【答案】 (C)

【解析】由于 $f(x)$ 满足微分方程 $y'' + y' - e^{\sin x} = 0$, 当 $x = x_0$ 时, 有

$$f''(x_0) + f'(x_0) = e^{\sin x_0}.$$

又由 $f'(x_0) = 0$, 有 $f''(x_0) = e^{\sin x_0} > 0$, 因而点 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点, 应选 (C).

(4) 【答案】 (B)

【解析】用换元法求极限, 令 $t = \frac{1}{x}$, 则当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, $t \rightarrow 0$, 且有

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{t \rightarrow 0} e^{t^2} \arctan \frac{t^2 + t + 1}{(1-t)(1+2t)} = \frac{\pi}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} y = -\infty,$$

所以 y 轴和 $y = \frac{\pi}{4}$ 是曲线的两条渐近线.

而 $x=1$ 和 $x=-2$ 并非曲线的渐近线, 因当 $x=1$ 和 $x=-2$ 时, y 分别趋向于 $\pm \frac{\pi e}{2}$ 和 $\pm \frac{\pi e^{1/4}}{2}$. 故应选 (B).

【相关知识点】 渐近线的相关知识:

水平渐近线: 若有 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, 则 $y = a$ 为水平渐近线;

铅直渐近线: 若有 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, 则 $x = a$ 为铅直渐近线;

斜渐近线: 若有 $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$ 存在且不为 ∞ , 则 $y = ax + b$ 为斜渐近线.

(5) **【答案】** (D)

【解析】 对于关于原点对称的区间上的积分, 应该关注被积函数的奇偶性.

由对称区间上奇偶函数积分的性质, 被积函数是奇函数, 积分区间关于原点对称, 则积分为 0, 故 $M = 0$, 且

由定积分的性质, 如果在区间 $[a, b]$ 上, 被积函数 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ ($a < b$).

所以 $N = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx > 0$, $P = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = -N < 0$.

因而 $P < M < N$, 应选 (D).

三、(本题共 5 小题, 每小题 5 分, 满分 25 分.)

(1) **【解析】** 方程两边对 x 求导, 得 $y' = f' \cdot (1 + y')$, 两边再求导, 得

$$y'' = f'' \cdot (1 + y')^2 + f' \cdot y'',$$

由于一阶导数不等于 1, 所以 $1 - f' \neq 0$.

以 $y' = \frac{f'}{1 - f'}$ 代入并解出 y'' , 得 $y'' = \frac{f''}{(1 - f')^3}$.

【相关知识点】 复合函数求导法则:

如果 $u = g(x)$ 在点 x 可导, 而 $y = f(u)$ 在点 $u = g(x)$ 可导, 则复合函数 $y = f[g(x)]$

在点 x 可导, 且其导数为

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

(2) **【解析】** 用换元积分法.

观察被积函数的特点,可考虑引入三角函数化简.

令 $x^2 = \sin t$, 则 $2x dx = \cos t dt$. 当 $x=0$ 时, $t=0$; 当 $x=1$ 时, $t=\frac{\pi}{2}$, 故

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3}{32} \pi.$$

【相关知识点】 定积分关于单三角函数的积分公式:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数,} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

注: 对于双阶乘 $n!!$ 的定义如下: 当 n 为奇数时, $n!! = 1 \times 3 \times \cdots \times n$; 当 n 为偶数时, $n!! = 2 \times 4 \times \cdots \times n$.

(3) **【解析】方法 1:** 用三角函数公式将 $\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n})$ 展开, 再化为重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ 的形式, 利用等价无穷小因子替换, 即 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \sim x$, 从而求出极限.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1 + \tan \frac{2}{n}}{1 - \tan \frac{2}{n}} \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{2 \tan \frac{2}{n}}{1 - \tan \frac{2}{n}} \right]^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{2 \tan \frac{2}{n}}{1 - \tan \frac{2}{n}} \right]^{\frac{1 - \tan \frac{2}{n}}{2 \tan \frac{2}{n}} \cdot \frac{4 \tan \frac{2}{n}}{2} \cdot \frac{1}{1 - \tan \frac{2}{n}}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \tan \frac{2}{n}}{2} \cdot \frac{1}{1 - \tan \frac{2}{n}}} = e^4. \end{aligned}$$

方法 2: 先取自然对数, 求出极限后再用恒等式 $e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \ln f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

因为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{1 + \tan \frac{2}{n}}{1 - \tan \frac{2}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left[1 + \frac{2 \tan \frac{2}{n}}{1 - \tan \frac{2}{n}} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{2 \tan \frac{2}{n}}{1 - \tan \frac{2}{n}} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \tan \frac{2}{n}}{1 - \tan \frac{2}{n}} = 4, \end{aligned}$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right)} = e^4$.

(4) **【解析】方法 1:** 利用三角函数的二倍角公式 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$, 并利用换元积分, 结合拆项法求积分, 得

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin 2x + 2 \sin x} &= \int \frac{dx}{2 \sin x (\cos x + 1)} \\
&= \int \frac{\sin x dx}{2 \sin^2 x (\cos x + 1)} \stackrel{\cos x = u}{=} -\frac{1}{2} \int \frac{1}{(1-u)(1+u)^2} du \\
&(\because \sin^2 x = 1 - \cos^2 x) \\
&= -\frac{1}{4} \int \frac{(1+u) + (1-u)}{(1-u)(1+u)^2} du = -\frac{1}{8} \int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} + \frac{2}{(1+u)^2} \right) du \\
&= \frac{1}{8} \left[\ln |1-u| - \ln |1+u| + \frac{2}{(1+u)} \right] + C \\
&= \frac{1}{8} \left[\ln(1 - \cos x) - \ln(1 + \cos x) + \frac{2}{1 + \cos x} \right] + C,
\end{aligned}$$

其中 C 为任意常数.

方法 2: 换元 $\cos x = u$ 后, 有

$$\text{原式} = \int \frac{dx}{2 \sin x (\cos x + 1)} = \int \frac{\sin x dx}{2 \sin^2 x (\cos x + 1)} = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{(1-u)(1+u)^2}.$$

用待定系数法将被积函数分解:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-u)(1+u)^2} &= \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} + \frac{D}{(1+u)^2} \\
&= \frac{(A-B)u^2 + (2A-D)u + (A+B+D)}{(1-u)(1+u)^2},
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A-B=0 \\ 2A-D=0 \\ A+B+D=1 \end{cases} \Rightarrow A=B=\frac{1}{4}, D=\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}
\text{于是, 原式} &= -\frac{1}{8} \int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} + \frac{2}{(1+u)^2} \right) du = \frac{1}{8} \left[\ln |1-u| - \ln |1+u| + \frac{2}{1+u} \right] + C \\
&= \frac{1}{8} \left[\ln(1 - \cos x) - \ln(1 + \cos x) + \frac{2}{1 + \cos x} \right] + C.
\end{aligned}$$

(5) 【解析】对梯形 $OABC$ 的面积为 D , 可用梯形面积公式 $\frac{h}{2}(a+b)$, 其中 h 为梯形的高, a 、 b 分别为上底和下底长度. 对于曲边梯形 $OABC$ 的面积则用积分式求解.

$$D = \frac{\frac{1}{2} + (\frac{1}{2} + a^2)}{2} a = \frac{a(1+a^2)}{2},$$

$$D_1 = \int_0^a (\frac{1}{2} + x^2) dx = \frac{1}{3} a^3 + \frac{1}{2} a = \frac{a(3+2a^2)}{6}.$$

由于 $1+a^2 < \frac{3}{2} + a^2$, 所以 $\frac{1+a^2}{\frac{3}{2}+a^2} < 1$, 由此,

$$\frac{D}{D_1} = \frac{\frac{a(1+a^2)}{2}}{\frac{a(3+2a^2)}{6}} = \frac{3(1+a^2)}{3+2a^2} = \frac{3}{2} \frac{1+a^2}{\frac{3}{2}+a^2} < \frac{3}{2}.$$

四、(本题满分 9 分)

【解析】方程 $kx + \frac{1}{x^2} = 1$ 的解即为 $\varphi(x) = kx^3 - x^2 + 1$ 的零点.

要证明方程 $kx + \frac{1}{x^2} = 1$ 有且仅有一个解, 只需要证明 $\varphi(x)$ 是单调函数, 且它的函数图像仅穿过 x 轴一次就可以了. 以下是证明过程.

对 $\varphi(x)$ 求一阶导数, 有 $\varphi'(x) = 3kx^2 - 2x = x(3kx - 2)$.

当 $k \leq 0$ 时, $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x)$ 单调减少, $\varphi(0) = 1 > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty$, $\varphi(x)$ 在 $x > 0$ 有唯一的零点;

当 $k > 0$ 时, $\varphi(x)$ 在 $(0, \frac{2}{3k})$ 单调减少, 在 $(\frac{2}{3k}, +\infty)$ 单调增加, $\varphi(\frac{2}{3k}) = 1 - \frac{4}{27k^2}$, 而 $\varphi(0) = 1 > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$, 当且仅当最小值 $\varphi(\frac{2}{3k}) = 0$ 时, $\varphi(x)$ 才在 $x > 0$ 有唯一零点, 这时应该有 $k = \frac{2}{9}\sqrt{3}$.

总之, 当 $k \leq 0$ 或 $k = \frac{2}{9}\sqrt{3}$ 时, 原方程有唯一实根.

五、(本题满分 9 分)

【解析】求函数的增减区间一般先求出函数的不连续点和驻点, 根据这些点将函数的定义域分成不同区间, 然后根据 y' 在此区间上的正负来判断该区间上函数的增减性以及极值点; 根据 y'' 的正负判定区间的凹凸性; 求渐近线时除判定是否存在水平或垂直渐近线外, 还要注意有没有斜渐近线. 作函数图形时要能综合 (1)、(2)、(3) 所给出的函数属性, 尤其注意渐近线、拐点、极值点和零点.

$$y = x + \frac{4}{x^2}, y' = 1 - \frac{8}{x^3}, y'' = \frac{24}{x^4} > 0.$$

无定义点: $x = 0$, 驻点: $x = 2$.

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y'	+	无定义	-	0	+
y''	+	无定义	+	+	+
y	上升	无定义	下降	极小	上升

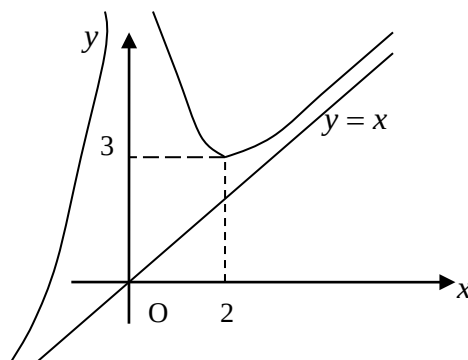
函数在 $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ 单调增加, 在 $(0, 2)$ 单调减少, 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 凹, 在 $x = 2$ 取

极小值 $y|_{x=2} = 3$:

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} y = \infty$, 所以 $x = 0$ 为垂直渐近线.

由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 0$, 所以 $y = x$ 是斜渐近线.

粗略草图如下:



【相关知识点】 渐近线的相关知识:

水平渐近线: 若有 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, 则 $y = a$ 为水平渐近线;

铅直渐近线: 若有 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, 则 $x = a$ 为铅直渐近线;

斜渐近线: 若有 $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$ 存在且不为 ∞ , 则 $y = ax + b$ 为斜渐近线.

六、(本题满分 9 分)

【解析】 所给方程为常系数的二阶线性非齐次方程, 对应的齐次方程的特征方程 $r^2 + a^2 = 0$

有两个根为 $r_1, r_2 = \pm ai$.

当 $a \neq 1$ 时, 非齐次方程的特解应设为 $Y = A \sin x + B \cos x$.

代入方程可以确定 $A = \frac{1}{a^2 - 1}, B = 0, Y = \frac{\sin x}{a^2 - 1}$.

当 $a = 1$ 时, 应设 $Y = xA \sin x + xB \cos x$,

代入方程可以确定 $A = 0, B = -\frac{1}{2}, Y = -\frac{x}{2} \cos x$.

由此, 所求的通解为

$$\text{当 } a \neq 1 \text{ 时, } y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax + \frac{\sin x}{a^2 - 1};$$

$$\text{当 } a = 1 \text{ 时, } y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{x}{2} \cos x.$$

【相关知识点】 1. 二阶线性非齐次方程解的结构: 设 $y^*(x)$ 是二阶线性非齐次方程

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的一个特解. $Y(x)$ 是与之对应的齐次方程

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 的通解, 则 $y = Y(x) + y^*(x)$ 是非齐次方程的通解.

2. 二阶常系数线性齐次方程通解的求解方法: 对于求解二阶常系数线性齐次方程的通解 $Y(x)$, 可用特征方程法求解: 即 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 中的 $P(x)$ 、 $Q(x)$ 均是常数, 方程

变为 $y'' + py' + qy = 0$. 其特征方程写为 $r^2 + pr + q = 0$, 在复数域内解出两个特征根 r_1, r_2 ; 分三种情况:

(1) 两个不相等的实数根 r_1, r_2 , 则通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$;

(2) 两个相等的实数根 $r_1 = r_2$, 则通解为 $y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$;

(3) 一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, 则通解为 $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$. 其中 C_1, C_2 为常数.

3. 对于求解二阶线性非齐次方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的一个特解 $y^*(x)$, 可用待定系数法, 有结论如下:

如果 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$, 则二阶常系数线性非齐次方程具有形如 $y^*(x) = x^k Q_m(x)e^{\lambda x}$

的特解, 其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 相同次数的多项式, 而 k 按 λ 不是特征方程的根、是特征方程的单根或是特征方程的重根依次取 0、1 或 2.

如果 $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + P_n(x) \sin \omega x]$, 则二阶常系数非齐次线性微分方程

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的特解可设为

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos \omega x + R_m^{(2)}(x) \sin \omega x],$$

其中 $R_m^{(1)}(x)$ 与 $R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次多项式, $m = \max\{l, n\}$, 而 k 按 $\lambda + i\omega$ (或 $\lambda - i\omega$) 不是特征方程的根、或是特征方程的单根依次取为 0 或 1.

七、(本题满分 9 分)

【解析】方法一：用积分比较定理.

首先需要统一积分区间：换元，令 $x = \lambda t$ ，则 $\int_0^\lambda f(x)dx = \lambda \int_0^1 f(\lambda t)dt$ ，

由此 $\int_0^\lambda f(x)dx - \lambda \int_0^1 f(x)dx = \lambda \int_0^1 [f(\lambda x) - f(x)]dx$.

因为 $f(x)$ 递减而 $\lambda x < x$ ，所以 $f(\lambda x) \geq f(x)$ ，上式的右端大于零，问题得证.

方法二：用积分中值定理.

为分清两中值的大小，需要分别在 $(0, \lambda)$, $(\lambda, 1)$ 两区间内用积分中值定理：

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^\lambda f(x)dx + \int_\lambda^1 f(x)dx,$$

由此，

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda f(x)dx - \lambda \int_0^1 f(x)dx &= (1-\lambda) \int_0^\lambda f(x)dx - \lambda \int_\lambda^1 f(x)dx \\ &= (1-\lambda) \cdot \lambda f(\xi_1) - \lambda \cdot (1-\lambda) f(\xi_2) \\ &= (1-\lambda) \cdot \lambda [f(\xi_1) - f(\xi_2)], \end{aligned}$$

其中， $0 < \xi_1 < \lambda < \xi_2 < 1$ ；又因 $f(x)$ 递减， $f(\xi_1) \geq f(\xi_2)$ ，上式的右端大于零，问题得证.

方法三：作为函数不等式来证明. 令

$$\varphi(\lambda) = \int_0^\lambda f(x)dx - \lambda \int_0^1 f(x)dx, \quad \lambda \in [0, 1].$$

则 $\varphi'(\lambda) = f(\lambda) - \int_0^1 f(x)dx$.

由积分中值定理，有 $\varphi'(\lambda) = f(\lambda) - f(\xi)$ ，其中 $\xi \in (0, 1)$ 为常数.

由 $f(\lambda)$ 递减， $\lambda = \xi$ 为唯一驻点，且 $\varphi'(\lambda)$ 在 $\lambda = \xi$ 由正变负， $\lambda = \xi$ 是 $\varphi(\lambda)$ 的极大值点也是最大值点；由此，最小点必为端点 $\lambda = 0$ 或 1. 从而有

$$\varphi(\lambda) \geq \varphi(0) = \varphi(1) = 0, 0 < \lambda < 1.$$

命题得证.

【相关知识】积分上限的函数的求导公式：

若 $F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x)dx$ ， $\alpha(t)$ ， $\beta(t)$ 均一阶可导，则

$$F'(t) = \beta'(t) \cdot f[\beta(t)] - \alpha'(t) \cdot f[\alpha(t)].$$

八、(本题满分 9 分)

【解析】如右图所示, 曲线左右对称,

与 x 轴的交点是 $(-2, 0), (2, 0)$.

只计算右半部分即可. 作垂直分割,

相应于 $[x, x + dx]$ 的小竖条的体积微元:

$$dV = \pi [3^2 - (3 - y)^2] dx = [3^2 - (x^2 - 1)^2] dx$$

$$= \pi(8 + 2x^2 - x^4) dx, 0 \leq x \leq 2,$$

$$\text{于是 } V = 2\pi \int_0^2 (8 + 2x^2 - x^4) dx = \frac{448}{15} \pi.$$

