

1995 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题(本题共 5 个小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

(1) 【答案】 e^6

【解析】这是 1^∞ 型未定式求极限,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{3x} \cdot 3x \cdot \frac{2}{\sin x}},$$

令 $3x = t$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $t \rightarrow 0$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{3x}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e,$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{6x}{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\sin x}} = e^{6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}} = e^6$.

(2) 【答案】 $\int_{x^2}^0 \cos t^2 dt - 2x^2 \cos x^4$

$$\begin{aligned} \text{【解析】} \quad \frac{d}{dx} \int_{x^2}^0 x \cos t^2 dt &= \frac{d}{dx} \left(x \int_{x^2}^0 \cos t^2 dt \right) \\ &= \int_{x^2}^0 \cos t^2 dt - x \cos(x^2)^2 \cdot (2x) \\ &= \int_{x^2}^0 \cos t^2 dt - 2x^2 \cos x^4. \end{aligned}$$

【相关知识】积分上限函数的求导公式:

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt = f(\beta(x)) \beta'(x) - f(\alpha(x)) \alpha'(x).$$

(3) 【答案】 4

【解析】利用向量运算律有

$$\begin{aligned} &[(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c})] \cdot (\vec{c} + \vec{a}) \\ &= [(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}] \cdot (\vec{c} + \vec{a}) + [(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}] \cdot (\vec{c} + \vec{a}) \\ &= (\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{a}) + (\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}) \cdot (\vec{c} + \vec{a}) \quad (\text{其中 } \vec{b} \times \vec{b} = \vec{0}) \\ &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} \\ &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} \\ &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 4. \end{aligned}$$

(4) 【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】令 $a_n = \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n-1}$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{n+1}{2^{n+1} + (-3)^{n+1}} x^{2(n+1)-1} \right|}{\left| \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n-1} \right|} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} x^2 \cdot \left| \frac{n+1}{n} \cdot \frac{3^n \left[\left(\frac{2}{3} \right)^n + (-1)^n \right]}{3^{n+1} \left[\left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} + (-1)^{n+1} \right]} \right| = \frac{1}{3} x^2, \end{aligned}$$

而当 $\frac{1}{3} x^2 < 1$ 时, 幂级数收敛, 即 $|x| < \sqrt{3}$ 时, 此幂级数收敛, 当 $\frac{1}{3} x^2 > 1$ 时, 即 $|x| > \sqrt{3}$ 时, 此

幂级数发散, 因此收敛半径为 $R = \sqrt{3}$.

(5) 【答案】 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

【解析】在已知等式 $A^{-1}BA = 6A + BA$ 两边右乘以 A^{-1} , 得 $A^{-1}B = 6E + B$, 即

$$(A^{-1} - E)B = 6E.$$

因为 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, 所以

$$B = 6(A^{-1} - E)^{-1} = 6 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

二、选择题(本题共 5 个小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

(1) 【答案】(C)

【解析】这是讨论直线 L 的方向向量与平面 Π 的法向量的相互关系问题.
直线 L 的方向向量

$$l = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -10 \end{pmatrix} = -28i + 14j - 7k = -7(4i - 2j + k),$$

平面 Π 的法向量 $n = 4i - 2j + k$, $l \parallel n$, $L \perp \Pi$. 应选(C).

(2) 【答案】(B)

【解析】由 $f''(x) > 0$ 可知 $f'(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上为严格单调递增函数, 故

$$f'(1) > f'(x) > f'(0), (0 < x < 1)$$

由微分中值定理, $f(1) - f(0) = f'(\xi), (0 < \xi < 1)$. 所以

$$f'(1) > f(1) - f(0) = f'(\xi) > f'(0), (0 < \xi < 1)$$

故应选择(B).

(3) 【答案】(A)

【解析】由于利用观察法和排除法都很难对本题作出选择, 必须分别验证充分条件和必要条件.

充分性: 因为 $f(0) = 0$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)(1 + |\sin x|)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0),$$

由此可得 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

必要性: 设 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 则 $f(x) \cdot |\sin x|$ 在 $x = 0$ 处可导, 由可导的充要条件知

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) \cdot |\sin x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) \cdot |\sin x|}{x}. \quad ①$$

根据重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad ②$$

结合①, ②, 我们有 $f(0) = -f(0)$, 故 $f(0) = 0$. 应选(A).

(4) 【答案】(C)

【解析】这是讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 敛散性的问题.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ 是交错级数, 显然 $\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ 单调下降趋于零, 由莱布尼兹判别法知, 该级数收敛.

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \ln^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ 中, $u_n^2 = \ln^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \sim \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^2 = \frac{1}{n}$.

根据正项级数的比较判别法以及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散. 因此, 应选 (C).

【相关知识点】 正项级数的比较判别法:

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = A$, 则

(1) 当 $0 < A < +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散;

(2) 当 $A = 0$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

(3) 当 $A = +\infty$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

(5) **【答案】** (C)

【解析】 P_1 是交换单位矩阵的第一、二行所得初等矩阵, P_2 是将单位矩阵的第一行加到第三行所得初等矩阵;

而 B 是由 A 先将第一行加到第三行, 然后再交换第一、二行两次初等交换得到的, 因此 $P_1 P_2 A = B$, 故应选 (C).

三、(本题共 2 小题, 每小题 5 分, 满分 10 分.)

(1) **【解析】** 这实质上已经变成了由方程式确定的隐函数的求导与带抽象函数记号的复合函数求导相结合的问题.

先由方程式 $\varphi(x^2, e^y, z) = 0$, 其中 $y = \sin x$ 确定 $z = z(x)$, 并求 $\frac{dz}{dx}$.

将方程两边对 x 求导得

$$\varphi'_1 \cdot 2x + \varphi'_2 \cdot e^y \cos x + \varphi'_3 \cdot \frac{dz}{dx} = 0,$$

解得

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{\varphi'_3} (\varphi'_1 \cdot 2x + \varphi'_2 \cdot e^y \cos x). \quad \textcircled{1}$$

现再将 $u = f(x, y, z)$ 对 x 求导, 其中 $y = \sin x$, $z = z(x)$,

可得 $\frac{du}{dx} = f'_1 + f'_2 \cdot \cos x + f'_3 \cdot \frac{dz}{dx}$.

将①式代入得 $\frac{du}{dx} = f'_1 + f'_2 \cdot \cos x - f'_3 \cdot \frac{1}{\varphi'_3} (\varphi'_1 \cdot 2x + \varphi'_2 \cdot e^y \cos x)$.

【相关知识点】 多元复合函数求导法则: 如果函数 $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ 都在点 (x, y) 具

有对 x 及对 y 的偏导数, 函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 具有连续偏导数, 则复合函数

$z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ 在点 (x, y) 的两个偏导数存在, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = f'_1 \frac{\partial u}{\partial x} + f'_2 \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = f'_1 \frac{\partial u}{\partial y} + f'_2 \frac{\partial v}{\partial y}.$$

(2) 【解析】方法一: 用重积分的方法.

将累次积分 $I = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y)dy$ 表成二重积分

$$I = \iint_D f(x)f(y)dxdy,$$

其中 D 如右图所示. 交换积分次序

$$I = \int_0^1 dy \int_0^y f(x)f(y)dx.$$

由于定积分与积分变量无关, 改写成

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x f(y)f(x)dy.$$

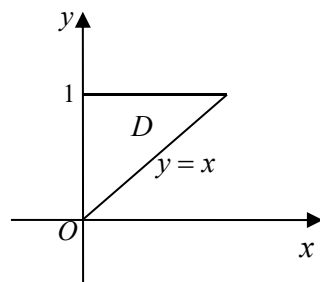
$$\begin{aligned} \Rightarrow 2I &= \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y)dy + \int_0^1 dx \int_0^x f(x)f(y)dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 f(x)f(y)dy = \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 f(y)dy = A^2. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} A^2.$$

方法二: 用分部积分法.

注意 $d\left(\int_x^1 f(y)dy\right) = -f(x)dx$, 将累次积分 I 写成

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(f(x) \int_x^1 f(y)dy \right) dx = - \int_0^1 \int_x^1 f(y)dy d\left(\int_x^1 f(y)dy \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\int_x^1 f(y)dy \right)^2 \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} A^2. \end{aligned}$$



四、(本题共 2 小题, 每小题 6 分, 满分 12 分.)

(1) 【解析】将曲面积分 I 化为二重积分 $I = \iint_{D_{xy}} f(x, y)dxdy$.

首先确定被积函数 $f(x, y) = z\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2},$

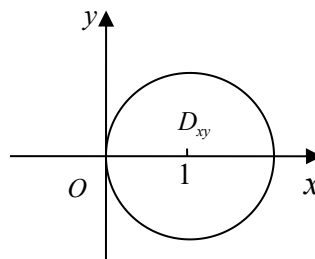
对锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 而言, $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}.$

其次确定积分区域即 Σ 在 xOy 平面的投影区域 D_{xy}

(见右图), 按题意:

$$D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 2x, \text{ 即 } (x-1)^2 + y^2 \leq 1.$$

$$I = \iint_{D_{xy}} \sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$



作极坐标变换 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则

$$D_{xy}: 0 \leq r \leq 2 \cos \theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

因此
$$I = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} r \cdot r dr = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^{2 \cos \theta} d\theta = \frac{32}{9} \sqrt{2}.$$

(2) 【解析】这就是将 $f(x)$ 作偶延拓后再作周期为 4 的周期延拓. 于是得 $f(x)$ 的傅氏系数:

$$b_n = 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad l = 2 \int_0^2 (x-1) \cos \frac{n\pi}{2} x dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^2 (x-1) d \sin \frac{n\pi}{2} x = -\frac{2}{n\pi} \int_0^2 \sin \frac{n\pi}{2} x dx \\ &= \frac{4}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi}{2} x \Big|_0^2 = \frac{4}{n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1) \\ &= \begin{cases} \frac{-8}{(2k-1)^2 \pi^2}, & n = 2k-1, \\ 0, & n = 2k, \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (x-1) dx = \frac{1}{2} (x-1)^2 \Big|_0^2 = 0.$$

由于(延拓后) $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 分段单调、连续且 $f(-1) = 1$. 于是 $f(x)$ 有展开式

$$f(x) = -\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi}{2} x, x \in [0, 2].$$

五、(本题满分 7 分)

【解析】设点 M 的坐标为 (x, y) , 则 M 处的切线方程为 $Y - y = y'(X - x)$.

令 $X = 0$, 得 $Y = y - xy'$, 切线与 y 轴的交点为 $A(0, y - xy')$. 由 $|\overline{MA}| = |\overline{OA}|$, 有

$$\sqrt{x^2 + (xy')^2} = |y - xy'|.$$

化简后得伯努利方程 $2yy' - \frac{1}{x}y^2 = -x$, $(y^2)' - \frac{1}{x}y^2 = -x$.

令 $z = y^2$, 方程化为一阶线性方程 $(z)' - \frac{1}{x}z = -x$.

解得 $z = x(c-x)$, 即 $y^2 = cx - x^2$, 亦即 $y = \sqrt{cx - x^2}$.

又由 $y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$, 得 $c = 3$, L 的方程为 $y = \sqrt{3x - x^2} (0 < x < 3)$.

六、(本题满分 8 分)

【解析】在平面上 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关 (其中 P, Q 有连续偏导数),

$$\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \text{ 即 } \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x.$$

对 x 积分得 $Q(x, y) = x^2 + \varphi(y)$, 其中 $\varphi(y)$ 待定. 代入另一等式得对 $\forall t$,

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx + (x^2 + \varphi(y))dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx + (x^2 + \varphi(y))dy. \quad ①$$

下面由此等式求 $\varphi(y)$.

方法一: 易求得原函数

$$\begin{aligned} 2xydx + (x^2 + \varphi(y))dy &= ydx^2 + x^2dy + \varphi(y)dy \\ &= d(x^2y) + d\left(\int_0^y \varphi(s)ds\right) = d\left(x^2y + \int_0^y \varphi(s)ds\right). \end{aligned}$$

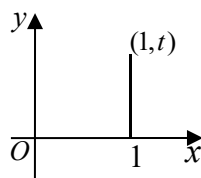
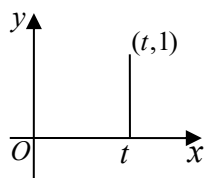
于是由①式得 $\left(x^2y + \int_0^y \varphi(s)ds\right)\Big|_{(0,0)}^{(t,1)} = \left(x^2y + \int_0^y \varphi(s)ds\right)\Big|_{(0,0)}^{(1,t)}$.

即 $t^2 + \int_0^1 \varphi(s)ds = t + \int_0^t \varphi(s)ds$, 亦即 $t^2 = t + \int_1^t \varphi(s)ds$.

求导得 $2t = 1 + \varphi(t)$, 即 $\varphi(t) = 2t - 1$.

因此 $Q(x, y) = x^2 + 2y - 1$.

方法二: 取特殊的积分路径: 对①式左端与右端积分分别取积分路径如下图所示.



于是得 $\int_0^1 (t^2 + \varphi(y))dy = \int_0^t (1 + \varphi(y))dy$.

即 $t^2 + \int_0^1 \varphi(y)dy = t + \int_0^t \varphi(y)dy$, 亦即 $t^2 = t + \int_1^t \varphi(y)dy$.

其余与方法一相同.

七、(本题满分 8 分)

【解析】(1) 反证法. 假设 $\exists c \in (a, b)$, 使 $g(c) = 0$. 则由罗尔定理, $\exists \xi_1 \in (a, c)$ 与 $\xi_2 \in (c, b)$, 使 $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$; 从而由罗尔定理, $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$, $g''(\xi) = 0$. 这与 $g''(x) \neq 0$ 矛盾.

(2) 证明本题的关键问题是: “对谁使用罗尔定理?” 换言之, “谁的导数等于零?” 这应该从所要证明的结果来考察. 由证明的结果可以看出本题即证 $f(x)g''(x) - f''(x)g(x)$ 在 (a, b) 存在零点.

方法一: 注意到 $f(x)g''(x) - f''(x)g(x) = (f(x)g'(x) - f'(x)g(x))'$,

考察 $f(x)g''(x) - f''(x)g(x)$ 的原函数, 令

$$\varphi(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x),$$

$\Rightarrow \varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 可导, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. 由罗尔定理, $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $\varphi'(\xi) = 0$. 即有

$$f(\xi)g''(\xi) - f''(\xi)g(\xi) = 0, \text{ 亦即 } \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$$

方法二: 若不能像前面那样观察到 $f(x)g''(x) - f''(x)g(x)$ 的原函数, 我们也可以用积分来讨论这个问题:

$$\begin{aligned} f(x)g''(x) - f''(x)g(x) &= (?)' \Leftrightarrow \int [f(x)g''(x) - f''(x)g(x)] dx = ? \\ \int [f(x)g''(x) - f''(x)g(x)] dx &= \int f(x)dg'(x) - \int g(x)df'(x) \\ &= \left[f(x)g'(x) - \int g'(x)f'(x)dx \right] - \left[f'(x)g(x) - \int f'(x)g'(x)dx \right] \\ &= f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \quad (\text{取 } C = 0). \end{aligned}$$

令 $\varphi(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$, 其余与方法一相同.

八、(本题满分 7 分)

【解析】设对应于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的特征向量为 $\xi = (x_1, x_2, x_3)^T$, 因为 A 为实对称矩阵, 且实对

称矩阵的不同特征值所对应的特征向量相互正交, 故 $\xi^T \xi_1 = 0$, 即 $x_2 + x_3 = 0$.

解之得 $\xi_2 = (1, 0, 0)^T, \xi_3 = (0, 1, -1)^T$.

于是有 $A(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\lambda_1 \xi_1, \lambda_2 \xi_2, \lambda_3 \xi_3)$,

所以 $A = (\lambda_1 \xi_1, \lambda_2 \xi_2, \lambda_3 \xi_3)(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

九、(本题满分 6 分)

【解析】方法一: 根据 $AA^T = E$ 有

$$|A + E| = |A + AA^T| = |A(E + A^T)| = |A| |E + A| = |A| |A + E|,$$

移项得 $(1 - |A|) |A + E| = 0$.

因为 $|A| < 0$, 故 $1 - |A| > 0$. 所以 $|A + E| = 0$.

方法二: 因为 $|(A + E)A^T| = |AA^T + A^T| = |E + A^T| = |E + A|$,

所以 $|A + E| |A| = |E + A|$,

即 $(1 - |A|) |A + E| = 0$.

因为 $|A| < 0$, 故 $1 - |A| > 0$. 所以 $|A + E| = 0$.

十、填空题(本题共 2 小题, 每小题 3 分, 满分 6 分.)

(1) 【解析】由题设, 因为是独立重复实验, 所以 X 服从 $n = 10, p = 0.4$ 的二项分布.

由二项分布的数学期望和方差计算公式, 有

$$E(X) = np = 4, D(X) = np(1 - p) = 2.4,$$

根据方差性质有 $E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = 18.4$.

(2) 【解析】令 $A = \{X < 0\}, B = \{Y < 0\}$, 则

$$P\{\max(X, Y) \geq 0\} = 1 - P\{\max(X, Y) < 0\} = 1 - P\{X < 0, Y < 0\}.$$

由概率的广义加法公式 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, 有

$$\begin{aligned} P\{\max(X, Y) \geq 0\} &= 1 - [1 - P(\overline{AB})] = P(\overline{A} + \overline{B}) = P(\overline{A}) + p(\overline{B}) - P(\overline{AB}) \\ &= \frac{4}{7} + \frac{4}{7} - \frac{3}{7} = \frac{5}{7}. \end{aligned}$$

十一、(本题满分 6 分)

【解析】方法 1: 用分布函数法先求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$.

当 $y \leq 1$ 时, $F_Y(y) = 0$;

当 $y > 1$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P(e^X \leq y) = P\{X \leq \ln y\}$

$$= \int_0^{\ln y} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\ln y} = 1 - \frac{1}{y},$$

所以由连续型随机变量的概率密度是分布函数的微分, 得

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2}, & y > 1, \\ 0, & y \leq 1. \end{cases}$$

或者直接将 $\int_0^{\ln y} e^{-x} dx$ 对 y 求导数得 $\frac{d}{dy} \int_0^{\ln y} e^{-x} dx = \frac{1}{y} e^{-\ln y} = \frac{1}{y^2}$.

方法 2: 用单调函数公式直接求 Y 的概率密度.

由于 $y = e^x$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调, 其反函数 $x = h(y) = \ln y$ 在 $(1, +\infty)$ 内可导且其导数为

$x'_y = \frac{1}{y} \neq 0$, 则所求概率密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} |h'(y)| \cdot f_X(h(y)), & y > 1, \\ 0, & y \leq 1. \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{y} \cdot e^{-\ln y}, & y > 1, \\ 0, & y \leq 1. \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{y^2}, & y > 1, \\ 0, & y \leq 1. \end{cases}$$

【相关知识点】对积分上限的函数的求导公式:

若 $F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x) dx$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 均一阶可导, 则

$$F'(t) = \beta'(t) \cdot f[\beta(t)] - \alpha'(t) \cdot f[\alpha(t)].$$