

1995 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题解析

一、填空题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

(1) 【答案】 $\frac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$

【解析】 由于 $f(x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{1+x} - 1 = 2(1+x)^{-1} - 1$,

$$f'(x) = 2 \cdot (-1)(1+x)^{-2},$$

$$f''(x) = 2 \cdot (-1)(-2)(1+x)^{-3}, \cdots,$$

所以 $f^{(n)}(x) = 2 \cdot (-1)^n n! (1+x)^{-(n+1)} = \frac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$

(2) 【答案】 $2xyf\left(\frac{y}{x}\right)$

【解析】 根据复合函数求导法则,

$$z'_x = yf\left(\frac{y}{x}\right) + xyf'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = yf\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y^2}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$z'_y = xf\left(\frac{y}{x}\right) + xyf'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} = xf\left(\frac{y}{x}\right) + yf'\left(\frac{y}{x}\right).$$

所以 $xz'_x + yz'_y = xyf\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 f'\left(\frac{y}{x}\right) + xyf\left(\frac{y}{x}\right) + y^2 f'\left(\frac{y}{x}\right) = 2xyf\left(\frac{y}{x}\right).$

【相关知识点】 复合函数求导法则: $y = \varphi(f(x))$ 的导数为 $y' = \varphi'(f(x))f'(x)$.

(3) 【答案】 $x + e^x + C$

【解析】 在 $f'(\ln x) = 1 + x$ 中令 $\ln x = t$, 则 $f'(t) = 1 + e^t$, 从而

$$f(t) = \int (1 + e^t) dt = t + e^t + C \Rightarrow f(x) = x + e^x + C.$$

(4) 【答案】 $\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

【解析】 由 $AA^* = |A|E$, 有 $\frac{A}{|A|} A^* = E$, 故 $(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}.$

而 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 10,$

所以 $(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$

(5) 【答案】 $\frac{\bar{X}}{Q} \sqrt{n(n-1)}$

【解析】假设检验是统计推断的另一个基本问题,它是根据具体情况和问题的要求,首先提出原假设 H_0 ,再由样本提供的信息,通过适当的方法来判断对总体所作的假设 H_0 是否成立.

首先分析该题是属于一个正态总体方差未知的关于期望值 μ 的假设检验问题.据此类型应该选取 t 检验的统计量是

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}}{\sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}},$$

经过化简得 $t = \frac{\bar{X}}{Q} \sqrt{n(n-1)}.$

【相关知识点】假设检验的一般步骤:

- (1) 确定所要检验的基本假设 H_0 ;
- (2) 选择检验的统计量,并要求知道其在一定条件下的分布;
- (3) 对确定的显著性水平 α ,查相应的概率分布,得临界值,从而确定否定域;
- (4) 由样本计算统计量,并判断其是否落入否定域,从而对假设 H_0 作出拒绝还是接受的判断.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.)

(1) 【答案】(D)

【解析】因
$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} \stackrel{x = -x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x) - f(1)}{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{x} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -2, \end{aligned}$$

所以应选(D).

(2) 【答案】(A)

【解析】由计算知 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \Big|_{-1}^1 = \pi$,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = -\frac{1}{\ln x} \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2},$$

且泊松积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$

故应选(A).

注: 对于本题选项(A), 由于当 $x=0$ 时 $\sin x=0$, 故在积分区间 $[-1,1]$ 中 $x=0$ 是瑕点, 反常

积分 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx$ 应分解为两个反常积分之和:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sin x} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx,$$

而且 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx$ 收敛的充要条件是两个反常积分 $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sin x} dx$ 与 $\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx$ 都收敛.

由于广义积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left(\tan \frac{x}{2} \right) \Big|_0^1 = +\infty,$

即 $\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx$ 发散, 故 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx$ 发散.

在此不可误以为 $\frac{1}{\sin x}$ 是奇函数, 于是 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx = 0$, 从而得出它是收敛的错误结论.

(3) 【答案】(C)

【解析】 $r(A)=m$ 表示 A 中有 m 个列向量线性无关, 有 m 阶子式不等于零, 并不是任意的, 因此(A)、(B)均不正确.

经初等变换可把 A 化成标准形, 一般应当既有初等行变换也有初等列变换, 只用一种不一定能化为标准形. 例如 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 只用初等行变换就不能化成 $(E_2, 0)$ 的形式, 故(D)不正确.

关于(C), 由 $BA=0$ 知 $r(B)+r(A) \leq m$, 又 $r(A)=m$, 从而 $r(B) \leq 0$, 按定义又有 $r(B) \geq 0$, 于是 $r(B)=0$, 即 $B=0$. 故应选(C).

(4) 【答案】(D)

【解析】 $\text{Cov}(U, V) = \text{Cov}(X-Y, X+Y).$

$$= \text{Cov}(X, X+Y) - \text{Cov}(Y, X+Y)$$

$$= \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(X, Y) - \text{Cov}(Y, X) - \text{Cov}(Y, Y)$$

$$= DX - DY.$$

由于 X 和 Y 同分布, 因此 $DX = DY$, 于是有 $Cov(U, V) = 0$.

由相关系数的计算公式 $\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}}$,

所以 U 与 V 的相关系数也为零, 应选 (D).

【相关知识点】 协方差的性质:

$$Cov(aX, bY) = abCov(X, Y);$$

$$Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y).$$

(5) **【答案】** (C)

【解析】 由于 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 将此正态分布标准化, 故 $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$,

$$P\{|X - \mu| < \sigma\} = P\left\{\left|\frac{X - \mu}{\sigma}\right| < 1\right\} = 2\Phi(1) - 1.$$

计算看出概率 $P\{|X - \mu| < \sigma\}$ 的值与 σ 大小无关, 所以本题应选 (C).

三、(本题满分 6 分)

【解析】 这是一道讨论分段函数在分界点处的连续性和可导性的问题. 一般要用连续性与可导性的定义并借助函数在分界点处的左极限与右极限以及左导数和右导数.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2(1 - \cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \cdot \frac{1}{2} x^2}{x^2} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x^2}{1} = 1,$$

故 $f(0+0) = f(0-0) = f(0)$, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x^2 - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{2} x^4}{2x} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{2}{x^2} (1 - \cos x) - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2(1 - \cos x) - x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin x - 2x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2(\cos x - 1)}{6x} = 0. \end{aligned}$$

即 $f'_+(0) = f'_-(0) = 0$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f'(0) = 0$.

四、(本题满分 6 分)

【解析】首先,在变上限定积分中引入新变量 $s = \frac{t}{3}$, 于是

$$\int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right) dt = 3 \int_0^x f(s) ds .$$

代入题设函数 $f(x)$ 所满足的关系式, 得 $f(x) = 3 \int_0^x f(s) ds + e^{2x}$.

在上式中令 $x = 0$ 得 $f(0) = 1$, 将上式两端对 x 求导数得

$$f'(x) = 3f(x) + 2e^{2x}.$$

由此可见 $f(x)$ 是一阶线性方程 $f'(x) - 3f(x) = 2e^{2x}$ 满足初始条件 $f(0) = 1$ 的特解.

用 e^{-3x} 同乘方程两端, 得 $(f(x)e^{-3x})' = 2e^{-x}$, 积分即得 $f(x) = Ce^{3x} - 2e^{2x}$.

由 $f(0) = 1$ 可确定常数 $C = 3$, 于是, 所求的函数是 $f(x) = 3e^{3x} - 2e^{2x}$.

五、(本题满分 6 分)

【解析】由 $1 - x - 2x^2 = (1 - 2x)(1 + x)$ 知

$$\ln(1 - x - 2x^2) = \ln(1 - 2x) + \ln(1 + x).$$

因为 $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots$,

其收敛区间为 $(-1, 1)$;

又 $\ln(1 - 2x) = (-2x) - \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{(-2x)^n}{n} + \cdots$,

其收敛区间为 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

于是有 $\ln(1 - x - 2x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + (-1)^{n+1} \frac{(-2x)^n}{n} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} - 2^n}{n} x^n$,

其收敛区间为 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

【相关知识点】收敛区间: 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是正数 R , 则其收敛区间是开区间

$(-R, R)$; 若其收敛半径是 $+\infty$, 则收敛区间是 $(-\infty, +\infty)$.

六、(本题满分 5 分)

【解析】方法一：本题中二重积分的积分区域 D 是全平面, 设 $a > 0$,

$$D_a = \{(x, y) | -a \leq x \leq a, -a \leq y \leq a\},$$

则当 $a \rightarrow +\infty$ 时, 有 $D_a \rightarrow D$. 从而

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \min\{x, y\} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{a \rightarrow +\infty} \iint_{D_a} \min\{x, y\} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

注意当 $x \leq y$ 时, $\min\{x, y\} = x$; 当 $x > y$ 时, $\min\{x, y\} = y$. 于是

$$\iint_{D_a} \min\{x, y\} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{-a}^a dy \int_{-a}^y x e^{-(x^2+y^2)} dx + \int_{-a}^a dx \int_{-a}^x y e^{-(x^2+y^2)} dy,$$

且

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a dx \int_{-a}^x y e^{-(x^2+y^2)} dy &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a dx \int_{-a}^x e^{-(x^2+y^2)} d(x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \left(e^{-(x^2+a^2)} - e^{-2x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} e^{-a^2} \int_{-a}^a e^{-x^2} dx - \frac{1}{2} \int_{-a}^a e^{-2x^2} dx. \end{aligned}$$

由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, 从而可得

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a dx \int_{-a}^x y e^{-(x^2+y^2)} dy &= 0 - \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a e^{-2x^2} dx \\ &= \underline{\underline{\frac{t = \sqrt{2}x}{2\sqrt{2}}}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-\sqrt{2}a}^{\sqrt{2}a} e^{-t^2} dt = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

同理可得 $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a dy \int_{-a}^y x e^{-(x^2+y^2)} dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$

于是
$$I = -\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

方法二：设 $R > 0$, 则圆域 $D_R = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$ 当 $R \rightarrow +\infty$ 时也趋于全平面, 从而

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \min\{x, y\} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{D_R} \min\{x, y\} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

引入极坐标系 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则

当 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ 与 $\frac{5\pi}{4} \leq \theta \leq 2\pi$ 时, $\min\{x, y\} = y = r \sin \theta$;

当 $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$ 时, $\min\{x, y\} = x = r \cos \theta$.

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad & \iint_{D_R} \min\{x, y\} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 e^{-r^2} dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos \theta d\theta \int_0^R r^2 e^{-r^2} dr + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 e^{-r^2} dr \\ &= \int_0^R r^2 e^{-r^2} dr \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos \theta d\theta + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} \sin \theta d\theta \right] = -2\sqrt{2} \int_0^R r^2 e^{-r^2} dr. \end{aligned}$$

$$\text{由此可得} \quad I = -2\sqrt{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R r^2 e^{-r^2} dr = \sqrt{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R r d(e^{-r^2})$$

$$= \sqrt{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[r e^{-r^2} \Big|_0^R - \int_0^R e^{-r^2} dr \right] = -\sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} dr = -\sqrt{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

七、(本题满分 6 分)

【解析】本题的关键在于 p 和 Q 之间存在函数关系, 因此 $R = pQ$ 既可看作 p 的函数, 也可

看作 Q 的函数, 由此分别求出 $\frac{dR}{dp}$ 及 $\frac{dR}{dQ}$, 并将它们与弹性 $E_p = \frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp}$ 联系起来, 进而求得

问题的解.

由 $Q = Q(p)$ 是单调减函数知 $\frac{dQ}{dp} < 0$, 从而需求对价格的弹性 $E_p = \frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp} < 0$, 这表明

题设 $E_p = b > 1$ 应理解为 $|E_p| = -E_p = b > 1$. 又由 $Q = Q(p)$ 是单调减函数知存在反函数

$p = p(Q)$ 且 $\frac{dp}{dQ} = \frac{1}{\frac{dQ}{dp}}$. 由收益 $R = pQ$ 对 Q 求导, 有

$$\frac{dR}{dQ} = p + Q \frac{dp}{dQ} = p + \frac{p}{\frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp}} = p \left(1 + \frac{1}{E_p} \right),$$

从而 $\frac{dR}{dQ} \Big|_{Q=Q_0} = p_0 \left(1 - \frac{1}{b} \right) = a$, 得 $p_0 = \frac{ab}{b-1}$.

由收益 $R = pQ$ 对 p 求导, 有

$$\frac{dR}{dp} = Q + p \frac{dQ}{dp} = Q(1 + \frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp}) = Q(1 + E_p),$$

从而 $\left. \frac{dR}{dp} \right|_{p=p_0} = Q_0(1-b) = c$, 于是 $Q_0 = \frac{c}{1-b}$.

八、(本题满分 6 分)

【解析】(1) 由要证的结论可知, 应将左端积分化成 $[0, a]$ 上的积分, 即

$$\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)g(x)dx + \int_0^a f(x)g(x)dx,$$

再将 $\int_{-a}^0 f(x)g(x)dx$ 作适当的变量代换化为在 $[0, a]$ 上的定积分.

方法一: 由于 $\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)g(x)dx + \int_0^a f(x)g(x)dx,$

在 $\int_{-a}^0 f(x)g(x)dx$ 中令 $x = -t$, 则由 $x: -a \rightarrow 0$, 得 $t: a \rightarrow 0$, 且

$$\int_{-a}^0 f(x)g(x)dx = \int_a^0 f(-t)g(-t)d(-t) = \int_0^a f(-t)g(t)dt = \int_0^a f(-x)g(x)dx,$$

所以 $\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]g(x)dx = A \int_0^a g(x)dx.$

方法二: 在 $\int_{-a}^a f(x)g(x)dx$ 中令 $x = -t$, 则由 $x: -a \rightarrow a$, 得 $t: a \rightarrow -a$, 且

$$\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = -\int_a^{-a} f(-t)g(-t)d(-t) = \int_{-a}^a f(-t)g(t)dt = \int_0^a f(-x)g(x)dx.$$

所以 $\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-a}^a f(x)g(x)dx + \int_{-a}^a f(-x)g(x)dx \right]$
 $= \frac{1}{2} \int_{-a}^a [f(x) + f(-x)]g(x)dx = \frac{A}{2} \int_{-a}^a g(x)dx = A \int_0^a g(x)dx.$

(2) 令 $f(x) = \arctan e^x$, $g(x) = |\sin x|$, 可以验证 $f(x)$ 和 $g(x)$ 符合(1)中条件, 从而可以用

(1)中结果计算题目中的定积分.

方法一: 取 $f(x) = \arctan e^x$, $g(x) = |\sin x|$, $a = \frac{\pi}{2}$.

由于 $f(x) + f(-x) = \arctan e^x + \arctan e^{-x}$ 满足

$$(\arctan e^x + \arctan e^{-x})' = \frac{e^x}{1+e^{2x}} + \frac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}} \equiv 0,$$

故 $\arctan e^x + \arctan e^{-x} = A.$

令 $x = 0$, 得 $2\arctan 1 = A \Rightarrow A = \frac{\pi}{2}$, 即 $f(x) + f(-x) = \frac{\pi}{2}$. 于是有

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2}.$$

方法二：取 $f(x) = \arctan e^x$, $g(x) = |\sin x|$, $a = \frac{\pi}{2}$, 于是

$$f(x) + f(-x) = \arctan e^x + \arctan \frac{1}{e^x} = \frac{\pi}{2}.$$

(这里利用了对任何 $x > 0$, 有 $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$)

以下同方法一.

九、(本题满分 9 分)

【解析】因为 $r(\text{I}) = r(\text{II}) = 3$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关,

因此 α_4 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 设为 $\alpha_4 = l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3$.

若 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 + k_4 (\alpha_5 - \alpha_4) = 0$,

即 $(k_1 - l_1 k_4) \alpha_1 + (k_2 - l_2 k_4) \alpha_2 + (k_3 - l_3 k_4) \alpha_3 + k_4 \alpha_5 = 0$,

由于 $r(\text{III}) = 4$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ 线性无关. 故必有

$$\begin{cases} k_1 - l_1 k_4 = 0, \\ k_2 - l_2 k_4 = 0, \\ k_3 - l_3 k_4 = 0, \\ k_4 = 0. \end{cases}$$

解出 $k_4 = 0, k_3 = 0, k_2 = 0, k_1 = 0$.

于是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 线性无关, 即其秩为 4.

十、(本题满分 10 分)

【解析】(1) 因为 $f(x_1, x_2, x_3)$ 对应的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix},$$

故 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵表示为

$$f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x = (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

(2) 由 A 的特征方程

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 4 & -4 \\ 2 & -4 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 2 - 2\lambda \\ -2 & \lambda - 4 & 0 \\ 2 & -4 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda + 4 & -10 & 0 \\ -2 & \lambda - 4 & 0 \\ 2 & -4 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 36) = 0, \end{aligned}$$

得到 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -6$.

由 $(E - A)x = 0$ 得基础解系 $X_1 = (2, 0, -1)^T$, 即属于 $\lambda = 1$ 的特征向量.

由 $(6E - A)x = 0$ 得基础解系 $X_2 = (1, 5, 2)^T$, 即属于 $\lambda = 6$ 的特征向量.

由 $(-6E - A)x = 0$ 得基础解系 $X_3 = (1, -1, 2)^T$, 即属于 $\lambda = -6$ 的特征向量.

对于实对称矩阵, 特征值不同特征向量已正交, 故只须单位化, 有

$$\gamma_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma_2 = \frac{X_2}{\|X_2\|} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \gamma_3 = \frac{X_3}{\|X_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{那么令 } Q = (\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3) = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix},$$

$$\text{经正交变换 } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \text{ 二次型化为标准形}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x = y^T \Lambda y = y_1^2 + 6y_2^2 - 6y_3^2.$$

十一、(本题满分 8 分)

【解析】对于新生产的每台仪器, 设事件 A 表示“仪器需要进一步调试”, B 表示“仪器能出厂”, 则 $\bar{A}$ = “仪器能直接出厂”, AB = “仪器经调试后能出厂”. 且 $B = \bar{A} \cup AB$, $\bar{A}$ 与 AB 互不相容, 应用加法公式与乘法公式, 且由条件概率公式

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \Rightarrow P(AB) = P(B|A) \cdot P(A),$$

有

$$P(B) = P(\bar{A}) + P(A)P(B|A) = 0.7 + 0.3 \times 0.8 = 0.94.$$

设 X 为所生产的 n 台仪器中能出厂的台数, 则 X 服从二项分布 $B(n, 0.94)$. 由二项分布的概率计算公式, 可得所求概率为

$$(1) \quad \alpha = P\{X = n\} = 0.94^n;$$

$$(2) \quad \beta = P\{X = n - 2\} = C_n^2 \cdot 0.94^{n-2} \cdot 0.06^2;$$

$$(3) \quad \theta = P\{X \leq n - 2\} = 1 - P\{X = n - 1\} - P\{X = n\} = 1 - 0.06n \times 0.94^{n-1} - 0.94^n.$$

【相关知识点】 二项分布的概率计算公式:

$$\text{若 } Y \sim B(n, p), \text{ 则 } P\{Y = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

十二、(本题满分 8 分)

【解析】 将整个平面分为五个区域(如右图).

$$\text{当 } (x, y) \in D_1 \text{ 时, } F(x, y) = 0,$$

$$\text{其中 } D_1 = \{(x, y) | x < 0 \text{ 或 } y < 0\}.$$

$$\text{当 } (x, y) \in D_4, \text{ 即 } x > 1 \text{ 且 } y > 1 \text{ 时, } F(x, y) = 1.$$

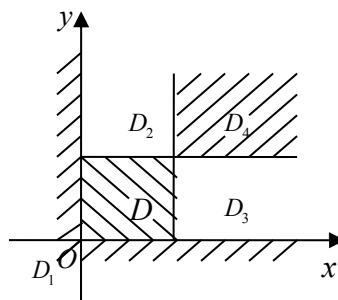
$$\text{当 } (x, y) \in D \text{ 时, 即 } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \text{ 时,}$$

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^y 4st \, dt \, ds = \int_0^x 2sy^2 \, ds = x^2 y^2.$$

$$\text{当 } (x, y) \in D_2, \text{ 即 } 0 \leq x \leq 1, y > 1 \text{ 时,}$$

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^y 4st \, dt \, ds = \int_0^x ds \int_0^1 4st \, dt = \int_0^x 2s \, ds = x^2.$$

$$\text{当 } (x, y) \in D_3, \text{ 即 } x > 1, 0 \leq y \leq 1 \text{ 时, 与 } D_2 \text{ 类似, 有 } F(x, y) = y^2.$$



$$\text{综上分析, } (X, Y) \text{ 的联合分布函数为 } F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ 或 } y < 0, \\ x^2 y^2, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ y^2, & 1 < x, 0 \leq y \leq 1, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1, 1 < y, \\ 1, & 1 < x, 1 < y. \end{cases}$$