

1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题解析

一、填空题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分, 把答案填在题中横线上.)

(1) 【答案】 $\frac{dx}{x(1+\ln y)}$

【解析】方法 1: 方程 $x = y^y$ 两边取对数得 $\ln x = \ln y^y = y \ln y$, 再两边求微分,

$$\frac{1}{x} dx = (\ln y + 1) dy \Rightarrow dy = \frac{1}{x(\ln y + 1)} dx \quad (x(\ln y + 1) \neq 0).$$

方法 2: 把 $x = y^y$ 变形得 $x = e^{y \ln y}$, 然后两边求微分得

$$dx = e^{y \ln y} d(y \ln y) = y^y (1 + \ln y) dy = x (1 + \ln y) dy,$$

由此可得 $dy = \frac{1}{x(1+\ln y)} dx.$

(2) 【答案】 $-\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + C$

【解析】由 $\int x f(x) dx = \arcsin x + C$, 两边求导数有

$$x f(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = x \sqrt{1-x^2},$$

于是有
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{f(x)} dx &= \int x \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{1-x^2} dx^2 \\ &= -\frac{1}{2} \int \sqrt{1-x^2} d(1-x^2) \\ &= -\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + C. \end{aligned}$$

(3) 【答案】 $\frac{c}{a} \geq 0$ (或 $ax_0^2 = c$), b 任意

【解析】对 $y = ax^2 + bx + c$ 两边求导得 $y' = 2ax + b, y'(x_0) = 2ax_0 + b$,

所以过 (x_0, y_0) 的切线方程为 $y - y_0 = (2ax_0 + b)(x - x_0)$, 即

$$y - (ax_0^2 + bx_0 + c) = (2ax_0 + b)(x - x_0).$$

又题设知切线过原点 $(0, 0)$, 把 $x = y = 0$ 代入上式, 得

$$-ax_0^2 - bx_0 - c = -2ax_0^2 - bx_0, \text{ 即 } ax_0^2 = c.$$

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(5) 【答案】 (4.412, 5.588)

【解析】 可以用两种方法求解:

(1) 已知方差 $\sigma^2 = 0.9^2$, 对正态总体的数学期望 μ 进行估计, 可根据

因 $X \sim N(\mu, 0.9^2)$, 设有 n 个样本, 样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$,

有 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{0.9^2}{n})$, 将其标准化, 由公式 $\frac{\bar{X} - E(X)}{\sqrt{D(X)/n}} \sim N(0, 1)$ 得:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{1/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

由正态分布分点的定义 $P\left\{\left|\frac{\bar{X} - \mu}{1/\sqrt{n}}\right| < u_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha$ 可确定临界值 $u_{\frac{\alpha}{2}}$,

进而确定相应的置信区间 $(\bar{x} - u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

(2) 本题是在单个正态总体方差已知条件下, 求期望值 μ 的置信区间问题.

由教材上已经求出的置信区间 $\left(\bar{x} - u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$,

其中 $P\left\{|U| < u_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha, U \sim N(0, 1)$, 可以直接得出答案.

方法 1: 由题设, $1 - \alpha = 0.95$, 可见 $\alpha = 0.05$. 查标准正态分布表知分位点 $u_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$. 本

题 $n = 9$, $\bar{X} = 5$, 因此, 根据 $P\left\{\left|\frac{\bar{X} - \mu}{1/\sqrt{n}}\right| < 1.96\right\} = 0.95$, 有

$$P\left\{\left|\frac{5 - \mu}{1/\sqrt{9}}\right| < 1.96\right\} = 0.95, \text{ 即 } P\{4.412 < \mu < 5.588\} = 0.95,$$

故 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是 (4.412, 5.588) .

方法 2: 由题设, $1 - \alpha = 0.95$,

$$P\{|U| < u_{\frac{\alpha}{2}}\} = P\{-u_{\frac{\alpha}{2}} < U < u_{\frac{\alpha}{2}}\} = 2\Phi(u_{\frac{\alpha}{2}}) - 1 = 0.95, \Phi(u_{\frac{\alpha}{2}}) = 0.975$$

查得 $u_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$.

$\sigma = 0.9^2$, $n = 9$, $\bar{X} = 5$ 代入 $(\bar{x} - u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ 得置信区间 (4.412, 5.588) .

二、选择题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 【答案】(D)

【解析】方法 1: 由题设知, 积分区域在极坐标系 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 中是

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \cos \theta \right\},$$

即是由 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 与 x 轴在第一象限所围成的

平面图形, 如右图.

由于 D 的最左边点的横坐标是 0, 最右点的横坐标是 1,

下边界方程是 $y = 0$, 上边界的方程是 $y = \sqrt{x - x^2}$, 从而 D

的直角坐标表示是

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x - x^2} \right\},$$

故(D)正确.

方法 2: 采取逐步淘汰法. 由于(A)中二重积分的积分区域的极坐标表示为

$$D_1 = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \sin \theta \right\},$$

而(B)中的积分区域是单位圆在第一象限的部分,

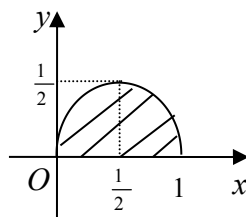
(C)中的积分区域是正方形 $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$,

所以, 他们都是不正确的. 故应选(D).

(2) 【答案】(A)

【解析】由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛, 可见级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n^2 + v_n^2)$ 收敛. 由不等式

$$|2u_n v_n| \leq u_n^2 + v_n^2$$



及比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |2u_n v_n|$ 收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} 2u_n v_n$ 收敛.

又因为 $(u_n + v_n)^2 = u_n^2 + v_n^2 + 2u_n v_n$, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 收敛, 故应选 (A).

设 $u_n = \frac{1}{n^2}, v_n = 1 (n = 1, 2, \dots)$, 可知 (B) 不正确.

设 $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} (n = 1, 2, \dots)$, 可知 (C) 不正确.

设 $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, v_n = -\frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots)$, 可知 (D) 不正确.

注: 在本题中命题 (D) “若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且 $u_n \geq v_n (n = 1, 2, \dots)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛.”

不正确, 这表明: 比较判别法适用于正项级数收敛 (或级数绝对收敛) 的判别, 但对任意项级数一般是不适用的. 这是任意项级数与正项级数收敛性判别中的一个根本区别.

(3) 【答案】(C)

【解析】伴随矩阵的基本关系式为 $AA^* = A^*A = |A|E$,

现将 A^* 视为关系式中的矩阵 A , 则有 $A^*(A^*)^* = |A^*|E$.

方法一: 由 $|A^*| = |A|^{n-1}$ 及 $(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$, 可得

$$(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1} \frac{A}{|A|} = |A|^{n-2} A.$$

故应选 (C).

方法二: 由 $A^*(A^*)^* = |A^*|E$, 左乘 A 得

$$(AA^*)(A^*)^* = |A|^{n-1} A, \text{ 即 } (|A|E)(A^*)^* = |A|^{n-1} A.$$

故应选 (C).

(4) 【答案】(D)

【解析】本题考查对向量组线性相关、线性无关概念的理解. 若向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ 线性

无关, 即若 $x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + \dots + x_s\gamma_s = 0$, 必有 $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_s = 0$.

既然 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 与 $k_1, \dots, k_m$ 不全为零, 由此推不出某向量组线性无关, 故应排除 (B)、(C).

一般情况下, 对于

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s + l_1\beta_1 + \dots + l_s\beta_s = 0,$$

不能保证必有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$, 及 $l_1\beta_1+\cdots+l_s\beta_s=0$, 故 (A) 不正确. 由已知条件, 有

$$\lambda_1(\alpha_1+\beta_1)+\cdots+\lambda_m(\alpha_m+\beta_m)+k_1(\alpha_1-\beta_1)+\cdots+k_m(\alpha_m-\beta_m)=0,$$

又 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 与 $k_1, \cdots, k_m$ 不全为零, 故 $\alpha_1+\beta_1, \cdots, \alpha_m+\beta_m, \alpha_1-\beta_1, \cdots, \alpha_m-\beta_m$ 线性相关.

故选 (D).

(5) 【答案】(B)

【解析】依题意

$$\frac{P[(A_1+A_2)B]}{P(B)} = \frac{P(A_1B)}{P(B)} + \frac{P(A_2B)}{P(B)}, \quad \frac{P(A_1B+A_2B)}{P(B)} = \frac{P(A_1B)+P(A_2B)}{P(B)}.$$

因 $P(B) > 0$, 故有 $P(A_1B+A_2B) = P(A_1B) + P(A_2B)$. 因此应选 (B).

注: 有些考生错误地选择 (D). 他们认为 (D) 是全概率公式, 对任何事件 B 都成立, 但是忽略了全概率公式中要求作为条件的事件 A_1, A_2 应满足 $P(A_1) > 0, P(A_2) > 0$, 且 A_1, A_2 是对立事件.

【相关知识点】条件概率公式: $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$.

三、(本题满分 6 分)

【解析】(1) 由于 $g(x)$ 有二阶连续导数, 故当 $x \neq 0$ 时, $f(x)$ 也具有二阶连续导数, 此时, $f'(x)$ 可直接计算, 且 $f'(x)$ 连续; 当 $x = 0$ 时, 需用导数的定义求 $f'(0)$.

$$\text{当 } x \neq 0 \text{ 时, } f'(x) = \frac{x[g'(x) + e^{-x}] - g(x) + e^{-x}}{x^2} = \frac{xg'(x) - g(x) + (x+1)e^{-x}}{x^2}.$$

当 $x = 0$ 时, 由导数定义及洛必达法则, 有

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - e^{-x}}{x^2} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) + e^{-x}}{2x} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g''(x) - e^{-x}}{2} = \frac{g''(0) - 1}{2}.$$

所以
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{xg'(x) - g(x) + (x+1)e^{-x}}{x^2}, & x \neq 0, \\ \frac{g''(0) - 1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

(2) $f'(x)$ 在 $x = 0$ 点的连续性要用定义来判定. 因为在 $x = 0$ 处, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg'(x) - g(x) + (x+1)e^{-x}}{x^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) + xg''(x) - g'(x) + e^{-x} - (x+1)e^{-x}}{2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g''(x) - e^{-x}}{2} = \frac{g''(0) - 1}{2} = f'(0).
\end{aligned}$$

而 $f'(x)$ 在 $x \neq 0$ 处是连续函数, 所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为连续函数.

四、(本题满分 6 分)

【解析】由 $z = f(u)$ 可得 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial y}$.

在方程 $u = \varphi(u) + \int_y^x p(t)dt$ 两边分别对 x, y 求偏导数, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(u) \frac{\partial u}{\partial x} + p(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(u) \frac{\partial u}{\partial y} - p(y).$$

所以
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{p(x)}{1 - \varphi'(u)}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-p(y)}{1 - \varphi'(u)}.$$

于是
$$p(y) \frac{\partial z}{\partial x} + p(x) \frac{\partial z}{\partial y} = \left[\frac{p(x)p(y)}{1 - \varphi'(u)} - \frac{p(x)p(y)}{1 - \varphi'(u)} \right] f'(u) = 0.$$

五、(本题满分 6 分)

【分析】题的被积函数是幂函数与指数函数两类不同的函数相乘, 应该用分部积分法.

【解析】方法 1: 因为

$$\begin{aligned}
\int \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx &= \int x d \frac{1}{1+e^{-x}} \xrightarrow{\text{分部积分}} \frac{x}{1+e^{-x}} - \int \frac{dx}{1+e^{-x}} \\
&= \frac{x}{1+e^{-x}} - \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \frac{x}{1+e^{-x}} - \int \frac{1}{1+e^x} d(1+e^x) \\
&= \frac{x}{1+e^{-x}} - \ln(1+e^x) + C,
\end{aligned}$$

所以
$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{xe^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x) \right] + \ln 2.$$

而
$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{xe^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x) \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{xe^x}{1+e^x} - \ln[e^x(1+e^{-x})] \right\} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{xe^x}{1+e^x} - x - \ln(1+e^{-x}) \right\}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{1+e^x} - 0 = 0,$$

故原式 $= \ln 2$.

方法 2:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{x e^x}{(1+e^x)^2} dx = - \int_0^{+\infty} x d \frac{1}{1+e^x} \\ &= - \frac{x}{1+e^x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} d(1+e^{-x}) = - \ln(1+e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} = \ln 2. \end{aligned}$$

六、(本题满分 5 分)

【分析】由结论可知, 若令 $\varphi(x) = xf(x)$, 则 $\varphi'(x) = f(x) + xf'(x)$. 因此, 只需证明 $\varphi(x)$ 在 $[0, 1]$ 内某一区间上满足罗尔定理的条件.

【解析】令 $\varphi(x) = xf(x)$, 由积分中值定理可知, 存在 $\eta \in (0, \frac{1}{2})$, 使

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x) dx = \frac{1}{2} \varphi(\eta),$$

由已知条件, 有 $f(1) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} xf(x) dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \varphi(\eta) = \varphi(\eta)$, 于是

$$\varphi(1) = f(1) = \varphi(\eta),$$

且 $\varphi(x)$ 在 $(\eta, 1)$ 上可导, 故由罗尔定理可知, 存在 $\xi \in (\eta, 1) \subset (0, 1)$, 使得

$$\varphi'(\xi) = 0, \text{ 即 } f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0.$$

【相关知识点】 1. 积分中值定理: 如果函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a, b]$ 上连续, 则在 $[a, b]$ 上至少存在一个点 ξ , 使下式成立:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \quad (a \leq \xi \leq b).$$

这个公式叫做积分中值公式.

2. 罗尔定理: 如果函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a, b) 内可导;

(3) 在区间端点处的函数值相等, 即 $f(a) = f(b)$,

那么在 (a, b) 内至少有一点 ξ ($a < \xi < b$), 使得 $f'(\xi) = 0$.

七、(本题满分 6 分)

【分析】利用函数的单调性的判定, 如果在 x 的某个区间上导函数 $f'(x) \geq 0$, 则函数 $f(x)$ 单调递增, 反之递减.

【解析】(1) 设售出商品的销售额为 R , 则

$$R = pQ = p\left(\frac{a}{p+b} - c\right), R'(p) = \frac{ab - c(p+b)^2}{(p+b)^2}.$$

令 $R' = 0$, 得
$$p_0 = \sqrt{\frac{ab}{c}} - b = \sqrt{\frac{b}{c}}(\sqrt{a} - \sqrt{bc}) > 0.$$

当 $0 < p < \sqrt{\frac{b}{c}}(\sqrt{a} - \sqrt{bc})$ 时, $R' > 0$, 所以随单价 p 的增加, 相应销售额 R 也将增加.

当 $p > \sqrt{\frac{b}{c}}(\sqrt{a} - \sqrt{bc})$ 时, 有 $R' < 0$, 所以随单价 p 的增加, 相应销售额 R 将减少.

(2) 由(1)可知, 当 $p = \sqrt{\frac{b}{c}}(\sqrt{a} - \sqrt{bc})$ 时, 销售额 R 取得最大值, 最大销售额为

$$R_{\max} = \left(\sqrt{\frac{ab}{c}} - b\right) \left[\frac{a}{\sqrt{\frac{ab}{c}}} - c\right] = (\sqrt{a} - \sqrt{bc})^2.$$

八、(本题满分 6 分)

【解析】令 $z = \frac{y}{x}$, 则 $\frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}$.

当 $x > 0$ 时, 原方程化为 $z + x \frac{dz}{dx} = z - \sqrt{1+z^2}$, 即 $\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = -\frac{dx}{x}$, 其通解为

$$\ln(z + \sqrt{1+z^2}) = -\ln x + C_1 \quad \text{或} \quad z + \sqrt{1+z^2} = \frac{C}{x}.$$

代回原变量, 得通解 $y + \sqrt{x^2 + y^2} = C (x > 0)$.

当 $x < 0$ 时, 原方程的解与 $x > 0$ 时相同, 理由如下:

令 $t = -x$, 于是 $t > 0$, 而且

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{dy}{dx} = -\frac{y - \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{y - \sqrt{x^2 + y^2}}{-x} = \frac{y - \sqrt{t^2 + y^2}}{t}.$$

从而有通解 $y + \sqrt{t^2 + y^2} = C (t > 0)$, 即 $y + \sqrt{x^2 + y^2} = C (x < 0)$.

综合得, 方程的通解为 $y + \sqrt{x^2 + y^2} = C$.

注: 由于未给定自变量 x 的取值范围, 因而在本题求解过程中, 引入新未知函数 $z = \frac{y}{x}$ 后得

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |x| \sqrt{1 + z^2},$$

从而, 应当分别对 $x > 0$ 和 $x < 0$ 求解, 在类似的问题中, 这一点应当牢记.

九、(本题满分 8 分)

【分析】 本题的(1)是考查特征值的基本概念, 而(2)是把实对称矩阵合同于对角矩阵的问题转化成二次型求标准形的问题, 用二次型的理论与方法来处理矩阵中的问题.

【解析】 (1) 因为 $\lambda = 3$ 是 A 的特征值, 故

$$|3E - A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-y & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3-y & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 8(2-y) = 0,$$

所以 $y = 2$.

(2) 由于 $A^T = A$, 要 $(AP)^T(AP) = P^T A^2 P = \Lambda$, 而

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

是对称矩阵, 故可构造二次型 $x^T A^2 x$, 将其化为标准形 $y^T \Lambda y$. 即有 A^2 与 Λ 合同. 亦即

$$P^T A^2 P = \Lambda.$$

方法一: 配方法.

$$\text{由于 } x^T A^2 x = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2 + 8x_3x_4$$

$$\begin{aligned} &= x_1^2 + x_2^2 + 5\left(x_3^2 + \frac{8}{5}x_3x_4 + \frac{16}{25}x_4^2\right) + 5x_4^2 - \frac{16}{5}x_4^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + 5\left(x_3 + \frac{4}{5}x_4\right)^2 + \frac{9}{5}x_4^2, \end{aligned}$$

那么, 令 $y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = x_3 + \frac{4}{5}x_4, y_4 = x_4$, 即经坐标变换

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix},$$

有 $x^T A^2 x = y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2 + \frac{9}{5}y_4^2.$

所以, 取 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 有 $(AP)^T (AP) = P^T A^2 P = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 5 & \\ & & & \frac{9}{5} \end{bmatrix}.$

方法二: 正交变换法.

二次型 $x^T A^2 x = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2 + 8x_3x_4$ 对应的矩阵为

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

其特征多项式

$$|\lambda E - A^2| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3 (\lambda - 9).$$

A^2 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 9$. 由 $(\lambda_1 E - A^2)x = 0$, 即

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

和 $(\lambda_4 E - A^2)x = 0$, 即

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

分别求得对应 $\lambda_{1,2,3} = 1$ 的线性无关特征向量

$$\alpha_1 = (1, 0, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0, 0)^T, \alpha_3 = (0, 0, 1, -1)^T,$$

和 $\lambda_4 = 9$ 的特征向量 $\alpha_4 = (0, 0, 1, 1)^T$.

对 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 用施密特正交化方法得 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, 再将 α_4 单位化为 β_4 , 其中:

$$\beta_1 = (1, 0, 0, 0)^T, \beta_2 = (0, 1, 0, 0)^T, \beta_3 = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})^T, \beta_4 = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T.$$

取正交矩阵

$$P = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

则
$$P^{-1}A^2P = P^T A^2 P = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 9 \end{bmatrix},$$

即
$$(AP)^T (AP) = P^T A^2 P = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 9 \end{bmatrix}.$$

十、(本题满分 8 分)

【解析】证法 1: (定义法) 若有一组数 $k, k_1, k_2, \dots, k_t$, 使得

$$k\beta + k_1(\beta + \alpha_1) + k_2(\beta + \alpha_2) + \dots + k_t(\beta + \alpha_t) = 0, \quad (1)$$

则因 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是 $AX = 0$ 的解, 知 $A\alpha_i = 0 (i = 1, 2, \dots, t)$, 用 A 左乘上式的两边, 有

$$(k + k_1 + k_2 + \dots + k_t)A\beta = 0. \quad (2)$$

由于 $A\beta \neq 0$, 故 $k + k_1 + k_2 + \dots + k_t = 0$.

对(1)重新分组为 $(k + k_1 + k_2 + \dots + k_t)\beta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t = 0$. (3)

把(2)代入(3)得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t = 0$.

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是基础解系, 它们线性无关, 故必有 $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_t = 0$.

代入(2)式得: $k=0$.

因此向量组 $\beta, \beta+\alpha_1, \beta+\alpha_2, \dots, \beta+\alpha_t$ 线性无关.

证法 2: (用秩) 经初等变换向量组的秩不变. 把第一列的-1 倍分别加至其余各列, 有

$$(\beta, \beta+\alpha_1, \beta+\alpha_2, \dots, \beta+\alpha_t) \rightarrow (\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t).$$

因此 $r(\beta, \beta+\alpha_1, \beta+\alpha_2, \dots, \beta+\alpha_t) = r(\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t)$.

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是基础解系, 它们是线性无关的, 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t) = t$, 又 β 必不能

由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 线性表出 (否则 $A\beta = 0$), 故 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t, \beta) = t+1$.

所以 $r(\beta, \beta+\alpha_1, \beta+\alpha_2, \dots, \beta+\alpha_t) = t+1$.

即向量组 $\beta, \beta+\alpha_1, \beta+\alpha_2, \dots, \beta+\alpha_t$ 线性无关.

十一、(本题满分 7 分)

【解析】 设一周 5 个工作日内发生故障的天数为 X , 则 X 服从二项分布即 $B(5, 0.2)$.

由二项分布的概率计算公式, 有

$$P\{X=0\} = 0.8^5 = 0.32768,$$

$$P\{X=1\} = C_5^1 0.8^4 \cdot 0.2 = 0.4096,$$

$$P\{X=2\} = C_5^2 0.8^3 \cdot 0.2^2 = 0.2048,$$

$$P\{X \geq 3\} = 1 - P\{X=0\} - P\{X=1\} - P\{X=2\} = 0.05792.$$

设一周内所获利润 Y (万元), 则 Y 是 X 的函数, 且

$$Y = f(X) = \begin{cases} 10, & \text{若 } X=0, \\ 5, & \text{若 } X=1, \\ 0, & \text{若 } X=2, \\ -2, & \text{若 } X \geq 3. \end{cases}$$

由离散型随机变量数学期望计算公式,

$$EY = 10 \times 0.32768 + 5 \times 0.4096 - 2 \times 0.05792 = 5.20896 \text{ (万元)}.$$

【相关知识点】 1. 二项分布的概率计算公式:

若 $Y \sim B(n, p)$, 则 $P\{Y=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k=0, 1, \dots, n$.

2. 离散型随机变量数学期望计算公式: $E(X) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot P\{X=x_k\}$.

十二、(本题满分 6 分)

【解析】一枚色子(骰子)接连掷两次, 其样本空间中样本点总数为 36.

$$\text{设事件 } A_1 = \text{“方程有实根”}, A_2 = \text{“方程有重根”}, \text{ 则 } A_1 = \{B^2 - 4C \geq 0\} = \left\{C \leq \frac{B^2}{4}\right\}.$$

用列举法求有利于 A_i 的样本点个数 ($i=1,2$), 具体做法见下表:

有利于的意思就是使不等式 $C \leq \frac{B^2}{4}$ 尽可能的成立, 则需要 B 越大越好, C 越小越好.

当 B 取遍 1, 2, 3, 4, 5, 6 时, 统计 C 可能出现的点数有多少种.

B	1	2	3	4	5	6
有利于 A_1 的样本点数	0	1	2	4	6	6
有利于 A_2 的样本点数	0	1	0	1	0	0

由古典型概率计算公式得到

$$p = P(A_1) = \frac{1+2+4+6+6}{36} = \frac{19}{36}, \quad q = P(A_2) = \frac{1+1}{36} = \frac{1}{18}.$$

【相关知识点】古典型概率计算公式: $P(A_i) = \frac{\text{有利于事件 } A_i \text{ 的样本点数}}{\text{样本空间的总数}}.$

十三、(本题满分 6 分)

【解析】依题意, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同分布, 可见 $X_1^2, X_2^2, \dots, X_n^2$ 也独立同分布. 由

$EX^k = a_k (k=1,2,3,4)$ 及方差计算公式, 有

$$\begin{aligned} EX_i^2 &= a_2, & DX_i^2 &= EX_i^4 - (EX_i^2)^2 = a_4 - a_2^2, \\ EZ_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i^2 = a_2, & DZ_n &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i^2 = \frac{1}{n} (a_4 - a_2^2). \end{aligned}$$

因此, 根据中心极限定理

$$U_n = \frac{Z_n - a_2}{\sqrt{(a_4 - a_2^2)/n}}$$

的极限分布是标准正态分布, 即当 n 充分大时, Z_n 近似服从参数为 $(a_2, \frac{a_4 - a_2^2}{n})$ 的正态分布.

【相关知识点】1. 列维-林德伯格中心极限定理, 又称独立同分布的中心极限定理:

设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同分布, 方差存在, 记 μ 与 σ^2 ($0 < \sigma < +\infty$) 分别是它们

相同的期望和方差, 则对任意实数 x , 恒有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu \right) \leq x \right\} = \Phi(x),$$

其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.

2. 方差计算公式: $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$.