

1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

(1) 【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】 $y' = \frac{2}{3} \left(x + e^{-\frac{x}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \right), y'|_{x=0} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3}.$

(2) 【答案】 2

【解析】 注意到对称区间上奇偶函数的积分性质, 有

$$\text{原式} = \int_{-1}^1 \left[x^2 + 2x\sqrt{1-x^2} + (1-x^2) \right] dx = \int_{-1}^1 \left[2x\sqrt{1-x^2} + 1 \right] dx = 0 + 2 = 2.$$

【相关知识点】 对称区间上奇偶函数的积分性质:

若 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续且为奇函数, 则 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$;

若 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续且为偶函数, 则 $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

(3) 【答案】 $y = e^{-x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

【解析】 因为 $y'' + 2y' + 5y = 0$ 是常系数的线性齐次方程, 其特征方程 $r^2 + 2r + 5 = 0$ 有

一对共轭复根 $r_1, r_2 = -1 \pm 2i$. 故通解为 $y = e^{-x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$.

(4) 【答案】 2

【解析】 因为 $x \rightarrow \infty$ 时, $\sin \ln \left(1 + \frac{k}{x} \right) \sim \ln \left(1 + \frac{k}{x} \right) \sim \frac{k}{x}$ (k 为常数), 所以,

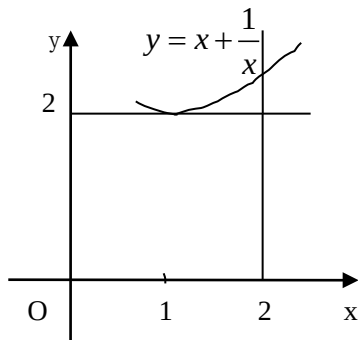
$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) - \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \frac{3}{x} \right) - \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \frac{1}{x} \right) = 3 - 1 = 2.$$

(5) 【答案】 $\ln 2 - \frac{1}{2}$

【解析】 曲线 $y = x + \frac{1}{x}$, $y = 2$ 的交点是 $(1, 2)$, $y' = \left(x + \frac{1}{x} \right)' = \frac{x^2 - 1}{x^2}$, 当 $x > 1$ 时

$y = x + \frac{1}{x}$ (单调上升) 在 $y = 2$ 上方, 于是

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x} - 2 \right) dx \\ &= \left(\frac{1}{2} x^2 + \ln x - 2x \right) \Big|_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



二、选择题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

(1) 【答案】(A)

【解析】方法 1: 用带皮亚诺余项泰勒公式. 由

$$\begin{aligned} & e^x - (ax^2 + bx + 1) \\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) \right) - (ax^2 + bx + 1) \\ &= (1-b)x + \left(\frac{1}{2} - a \right) x^2 + o(x^2) \stackrel{\text{令}}{=} o(x^2), \end{aligned}$$

可得
$$\begin{cases} 1-b=0, \\ \frac{1}{2}-a=0, \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{2}, b=1. \text{ 应选 (A).}$$

方法 2: 用洛必达法则. 由

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (ax^2 + bx + 1)}{x^2} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2ax - b}{2x} = 0,$$

有
$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 2ax - b) = 1 - b = 0 \Rightarrow b = 1.$$

又由
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2ax - b}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2a}{2} = \frac{1-2a}{2} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

应选 (A).

(2) 【答案】(C)

【解析】方法一: 首先, 当 $x=0$ 时, $|f(0)| \leq 0 \Rightarrow f(0) = 0$.

而按照可导定义我们考察

$$0 \leq \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| = \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \left| \frac{x^2}{x} \right| = |x| \rightarrow 0 (x \rightarrow 0),$$

由夹逼准则,
$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0, \text{ 故应选 (C).}$$

方法二: 显然, $f(0) = 0$, 由 $|f(x)| \leq x^2$, $x \in (-\delta, \delta)$, 得 $\left| \frac{f(x)}{x^2} \right| \leq 1$, $x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$, 即

$\frac{f(x)}{x^2}$ 有界, 且

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x^2} \cdot x \right) = 0.$$

故应选 (C).

方法三: 排除法.

令 $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$, 故 (A)、(B)、(D) 均不对, 应选 (C).

【相关知识点】 定理: 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

(3) **【答案】** (D)

【解析】方法一: 排除法. 例如 $f(x) = x$, 则 (A), (C) 不对; 又令 $f(x) = e^{-x}$, 则 (B) 不对. 故应选择 (D).

方法二: 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, 对于 $M > 0$, 存在 x_0 , 使得当 $x > x_0$ 时, $f'(x) > M$.

由此, 当 $x > x_0$ 时, 由拉格朗日中值定理,

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) > f(x_0) + M(x - x_0) \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow +\infty),$$

从而有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 故应选择 (D).

【相关知识点】 拉格朗日中值定理: 如果函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a, b) 内可导,

那么在 (a, b) 内至少有一点 ξ ($a < \xi < b$), 使等式

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

成立.

(4) **【答案】** (C)

【解析】 令 $f(x) = |x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x$, 则 $f(-x) = f(x)$, 故 $f(x)$ 是偶函数, 考察 $f(x)$

在 $(0, +\infty)$ 内的实数个数:

$$f(x) = x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{2}} - \cos x \quad (x > 0).$$

首先注意到 $f(0) = -1 < 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{4}} + (\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}} > 1 > 0$, 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 由零值定

理, 函数 $f(x)$ 必有零点, 且由

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \sin x > 0,$$

$f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单调递增, 故 $f(x)$ 有唯一零点.

当 $x \geq \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) = x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{2}} - \cos x \geq (\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{4}} + (\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}} - 1 > 0$, 没有零点;

因此, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有一个零点. 又由于 $f(x)$ 是偶函数, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有两个零点.

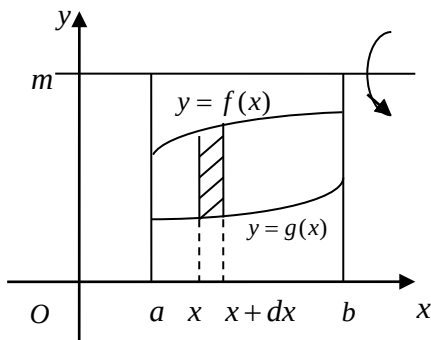
故应选 (C).

【相关知识点】 零点定理: 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号 (即

$f(a) \cdot f(b) < 0$), 那么在开区间 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使 $f(\xi) = 0$.

(5) **【答案】** (B)

【解析】



见上图, 作垂直分割, 相应于 $[x, x+dx]$ 的小竖条的体积微元

$$\begin{aligned} dV &= \pi(m-g(x))^2 dx - \pi(m-f(x))^2 dx \\ &= \pi[(m-g(x)) + (m-f(x))] \cdot [(m-g(x)) - (m-f(x))] dx \\ &= \pi[2m-g(x)-f(x)] \cdot [f(x)-g(x)] dx, \end{aligned}$$

于是
$$V = \int_a^b \pi[2m-g(x)-f(x)] \cdot [f(x)-g(x)] dx,$$

故选择 (B).

三、(本题共 6 小题, 每小题 5 分, 满分 30 分.)

(1) **【解析】** 方法一: 换元法.

令 $\sqrt{1-e^{-2x}} = u$, 则 $x = -\frac{1}{2} \ln(1-u^2)$, $dx = \frac{u}{1-u^2} du$,

所以
$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}} dx &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u^2}{1-u^2} du = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{1-u^2} - 1 \right) du = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} - 2 \right) du \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \ln(2+\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

方法二: 换元法.

令 $e^{-x} = \sin t$, 则 $x = -\ln \sin t$, $dx = -\frac{\cos t}{\sin t} dt$, $x: 0 \rightarrow \ln 2 \Rightarrow t: \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{6}$,

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}} dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \left(-\frac{\cos t}{\sin t}\right) dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin t} - \sin t\right) dt \\ &= \ln(\csc t - \cot t) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \cos t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

方法三：分部积分法和换元法结合。

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_0^{\ln 2} e^{-x} \sqrt{e^{2x} - 1} dx = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^{2x} - 1} d(-e^{-x}) \\ &= -e^{-x} \sqrt{e^{2x} - 1} \Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} e^{-x} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx\end{aligned}$$

令 $e^x = t$, 则 $x: 0 \rightarrow \ln 2 \Rightarrow t: 1 \rightarrow 2$,

$$\text{原式} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}) \Big|_1^2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(2 + \sqrt{3}).$$

【相关知识点】 1. $\int \csc x dx = \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln |\csc x - \cot x| + C,$

2. $a > 0$ 时, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C.$

(2) **【解析】方法一：** $\int \frac{dx}{1 + \sin x} = \int \frac{(1 - \sin x)dx}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} = \int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} dx$

$$\begin{aligned}&= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx + \int \frac{d \cos x}{\cos^2 x} \\ &= \tan x - \frac{1}{\cos x} + C.\end{aligned}$$

方法二：

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1 + \sin x} &= \int \frac{dx}{\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)^2} \\ &= \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{\left(1 + \tan \frac{x}{2}\right)^2} dx = 2 \int \frac{d\left(1 + \tan \frac{x}{2}\right)}{\left(1 + \tan \frac{x}{2}\right)^2} = -\frac{2}{1 + \tan \frac{x}{2}} + C.\end{aligned}$$

方法三：换元法。

令 $\tan \frac{x}{2} = t$, 则 $x = 2 \arctan t, dx = \frac{2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2 \tan t}{1 + \tan^2 t} = \frac{2t}{1+t^2},$

$$\text{原式} = \int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1 + \tan \frac{x}{2}} + C.$$

(3) 【解析】这是由参数方程所确定的函数, 其导数为

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2f(t^2) \cdot f'(t^2) \cdot 2t}{f(t^2)} = 4tf'(t^2),$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} (4tf'(t^2)) \cdot \frac{dt}{dx} = [4f'(t^2) + 4tf''(t^2) \cdot 2t] \cdot \frac{1}{f(t^2)} \\ &= \frac{4}{f(t^2)} [f'(t^2) + 2t^2 f''(t^2)]. \end{aligned}$$

(4) 【解析】函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处带拉格朗日余项的泰勒展开式为

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, (0 < \theta < 1).$$

对于函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 有

$$f(x) = \frac{2}{1+x} - 1 = 2(1+x)^{-1} - 1,$$

$$f'(x) = 2 \cdot (-1)(1+x)^{-2},$$

$$f''(x) = 2 \cdot (-1) \cdot (-2)(1+x)^{-3},$$

, ...,

$$f^{(n)}(x) = 2(-1)^n \cdot n!(1+x)^{-(n+1)}$$

所以 $f^{(n)}(0) = 2(-1)^n \cdot n!, \quad (n=1, 2, 3, \cdots),$

故 $f(x) = \frac{1-x}{1+x} = 1 - 2x + 2x^2 + \cdots + (-1)^n 2x^n + (-1)^{n+1} \frac{2x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1).$

(5) 【解析】方法一: 微分方程 $y'' + y = x^2$ 对应的齐次方程 $y'' + y' = 0$ 的特征方程为

$r^2 + r = 0$, 两个根为 $r_1 = 0, r_2 = -1$, 故齐次方程的通解为 $y = c_1 + c_2 e^{-x}$.

设非齐次方程的特解 $Y = x \cdot (ax^2 + bx + c)$, 代入方程可以得到 $a = \frac{1}{3}, b = -1, c = 2$,

因此方程通解为 $y = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x$.

方法二: 方程可以写成 $(y + y')' = x^2$, 积分得 $y + y' = \frac{x^3}{3} + c_0$, 这是一阶线性非齐次微分方

程,可直接利用通解公式求解. 通解为

$$\begin{aligned}y &= e^{-\int dx} \left(\int \left(\frac{x^3}{3} + c_0 \right) e^{\int dx} dx + C \right) \\&= e^{-x} \left(\int \left(\frac{x^3}{3} + c_0 \right) e^x dx + C \right) = e^{-x} \left(\frac{1}{3} \int x^3 de^x + c_0 e^x + C \right) \\&= \frac{e^{-x}}{3} (x^3 e^x - 3 \int e^x x^2 dx) + c_0 + C e^{-x} \\&= \frac{x^3}{3} - e^{-x} \int e^x x^2 dx + c_0 + C e^{-x} = \frac{x^3}{3} - e^{-x} (e^x x^2 - 2 \int e^x x dx) + c_0 + C e^{-x} \\&= \frac{x^3}{3} - x^2 + 2e^{-x} (e^x x - e^x) + c_0 + C e^{-x} \\&= \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + c_1 + C e^{-x}.\end{aligned}$$

方法三: 作为可降阶的二阶方程, 令 $y' = P$, 则 $y'' = P'$, 方程化为 $P' + P = x^2$, 这是一阶线性非齐次微分方程, 可直接利用通解公式求解. 通解为

$$\begin{aligned}P &= e^{-x} \left(c_0 + \int x^2 e^x dx \right) = e^{-x} (c_0 + x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x) \\&= c_0 e^{-x} + x^2 - 2x + 2.\end{aligned}$$

再积分得
$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x.$$

【相关知识点】 1. 二阶线性非齐次方程解的结构: 设 $y^*(x)$ 是二阶线性非齐次方程

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的一个特解. $Y(x)$ 是与之对应的齐次方程

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 的通解, 则 $y = Y(x) + y^*(x)$ 是非齐次方程的通解.

2. 二阶常系数线性齐次方程通解的求解方法: 对于求解二阶常系数线性齐次方程的通解 $Y(x)$, 可用特征方程法求解: 即 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 中的 $P(x)$ 、 $Q(x)$ 均是常数, 方程变为 $y'' + py' + qy = 0$. 其特征方程写为 $r^2 + pr + q = 0$, 在复数域内解出两个特征根 r_1, r_2 ; 分三种情况:

(1) 两个不相等的实数根 r_1, r_2 , 则通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$;

(2) 两个相等的实数根 $r_1 = r_2$, 则通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{rx_1}$;

(3) 一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, 则通解为 $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$. 其中 C_1, C_2 为常数.

3. 对于求解二阶线性非齐次方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的一个特解 $y^*(x)$, 可用待定系数法, 有结论如下:

如果 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$, 则二阶常系数线性非齐次方程具有形如 $y^*(x) = x^k Q_m(x)e^{\lambda x}$

的特解, 其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 相同次数的多项式, 而 k 按 λ 不是特征方程的根、是特征方程的单根或是特征方程的重根依次取 0、1 或 2.

如果 $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + P_n(x) \sin \omega x]$, 则二阶常系数非齐次线性微分方程

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的特解可设为

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos \omega x + R_m^{(2)}(x) \sin \omega x],$$

其中 $R_m^{(1)}(x)$ 与 $R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次多项式, $m = \max\{l, n\}$, 而 k 按 $\lambda + i\omega$ (或 $\lambda - i\omega$) 不是特征方程的根、或是特征方程的单根依次取为 0 或 1.

4. 一阶线性非齐次方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的通解为

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right), \quad \text{其中 } C \text{ 为任意常数.}$$

(6) 【解析】建立坐标系, 底面椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

方法一: 以垂直于 y 轴的平面截此楔形体所得的截面为直角三角形,

其中一条直角边长为 $x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$,

另一条直角边长为 $\frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \cdot \tan \alpha$,

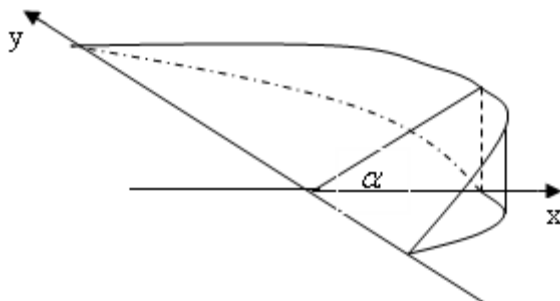
故截面面积为

$$S(y) = \frac{1}{2} \frac{a^2}{b^2} (b^2 - y^2) \cdot \tan \alpha.$$

楔形体的体积为

$$V = 2 \int_0^b S(y) dy = \frac{a^2}{b^2} \tan \alpha \int_0^b (b^2 - y^2) dy = \frac{2}{3} a^2 b \tan \alpha.$$

方法二: 以垂直于 x 轴的平面截此楔形体所得的截面为矩形,



其中一条边长为 $2y = 2\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$,

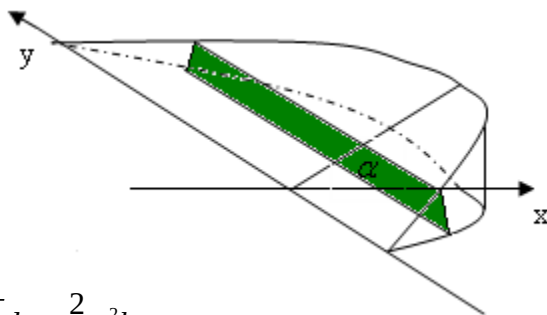
另一条边长为 $x \cdot \tan \alpha$,

故截面面积为

$$S(x) = 2\frac{b}{a}x\sqrt{a^2 - x^2} \cdot \tan \alpha,$$

楔形体的体积为

$$V = 2\int_0^a S(x)dx = \frac{2b}{a}\tan \alpha \int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{2}{3}a^2b\tan \alpha.$$



四、(本题满分 8 分)

【解析】方法一：分部积分法.

$$\begin{aligned} \int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx &= \int \frac{\arctan x}{x^2} dx - \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \\ &= \int \arctan x d\left(-\frac{1}{x}\right) - \int \arctan x d(\arctan x) \\ &\stackrel{\text{分部}}{=} -\frac{1}{x} \arctan x + \int \frac{dx}{x(1+x^2)} - \frac{1}{2} \arctan^2 x \\ &= -\frac{1}{x} \arctan x + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx - \frac{1}{2} \arctan^2 x \\ &= -\frac{1}{x} \arctan x + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \arctan^2 x + C. \end{aligned}$$

方法二：换元法与分部积分法结合.

令 $\arctan x = t$, 则 $x = \tan t, dx = \sec^2 t dt$,

$$\begin{aligned} \int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx &= \int \frac{t \sec^2 t}{\tan^2 t (1 + \tan^2 t)} dt = \int \frac{t}{\tan^2 t} dt = \int t \cot^2 t dt \\ &= \int t(\csc^2 t - 1) dt = \int t d(-\cot t) - \int t dt \\ &\stackrel{\text{分部}}{=} -t \cot t + \int \cot t dt - \frac{1}{2} t^2 \\ &= -t \cot t + \int \frac{\cos x}{\sin x} dt - \frac{1}{2} t^2 \\ &= -t \cot t + \int \frac{1}{\sin t} d \sin t - \frac{1}{2} t^2 \\ &= -t \cot t + \ln|\sin t| - \frac{1}{2} t^2 + C. \end{aligned}$$

五、(本题满分 8 分)

【分析】为了正确写出函数 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$, 并快捷地判断出函数 $g(x)$ 的连续性、可导

性, 须知道如下关于反函数的有关性质.

【相关知识点】反函数的性质: ① 若函数 $f(x)$ 是单调且连续的, 则反函数 $g(x)$ 有相同的单

调性且也是连续的; ② 函数 $f(x)$ 的值域即为反函数 $g(x)$ 的定义域; ③ $g'(x) = \frac{1}{f'(x)}$,

故函数 $f(x)$ 的不可导点和使 $f'(x) = 0$ 的点 x 对应的值 $f(x)$ 均为 $g(x)$ 的不可导点.

【解析】(1) 由题设, 函数 $f(x)$ 的反函数为

$$g(x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{1-x}{2}}, & x < -1, \\ \sqrt[3]{x}, & -1 \leq x \leq 8, \\ \frac{x+16}{12}, & x > 8. \end{cases}$$

(2) **方法一:** 考察 $f(x)$ 的连续性与导函数. 注意

$$f(x) = \begin{cases} 1-2x^2, & x < -1, \\ x^3, & -1 \leq x \leq 2, \\ 12x-16, & x > 2 \end{cases}$$

在 $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$, $(2, +\infty)$ 区间上 $f(x)$ 分别与初等函数相同, 故连续. 在 $x = -1$, $x = 2$ 处分别左、右连续, 故连续. 易求得

$$f'(x) = \begin{cases} -4x, & x < -1, \\ 3x^2, & -1 < x < 2, \quad f'_-(-1) = 4, \quad f'_+(-1) = 3, \\ 12, & x > 2 \end{cases}$$
$$f'_-(2) = 12, \quad f'_+(2) = 12 \Rightarrow f'(2) = 12.$$

由于函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调上升且连续, 故函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调且连续, 没有间断点.

由于仅有 $x = 0$ 时 $f'(x) = 0$ 且 $f(0) = 0$, 故 $x = 0$ 是 $g(x)$ 的不可导点; 仅有 $x = -1$ 是

$f(x)$ 的不可导点(左、右导数 $\exists$, 但不相等), 因此 $g(x)$ 在 $f(-1) = -1$ 处不可导.

方法二: 直接考察 $g(x)$ 的连续性与可导性. 注意

$$g(x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{1-x}{2}}, & x < -1, \\ \sqrt[3]{x}, & -1 \leq x \leq 8, \\ \frac{x+16}{12}, & x > 8, \end{cases}$$

在 $(-\infty, -1), (-1, 8), (8, +\infty)$ 区间上 $g(x)$ 分别与初等函数相同, 故连续. 在 $x = -1, x = 8$ 处分别左、右连续, 故连续, 即 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 没有间断点.

$g(x)$ 在 $(-\infty, -1), (-1, 8), (8, +\infty)$ 内分别与初等函数相同, 这些初等函数只有 $\sqrt[3]{x}$ 在 $x = 0$ 不可导, 其余均可导. 在 $x = -1$ 处,

$$g'_-(-1) = \left(-\sqrt{\frac{1-x}{2}} \right)' \Big|_{x=-1} = \frac{1}{4}, g'_+(-1) = \left(\sqrt[3]{x} \right)' \Big|_{x=-1} = \frac{1}{3},$$

$\Rightarrow g'(-1)$ 不 $\exists$. 在 $x = 8$ 处,

$$g'_-(8) = \left(\sqrt[3]{x} \right)' \Big|_{x=8} = \frac{1}{12}, g'_+(8) = \left(\frac{x+16}{12} \right)' \Big|_{x=8} = \frac{1}{12},$$

$\Rightarrow g'(8) \exists$.

因此, $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内仅有 $x = 0$ 与 $x = -1$ 两个不可导点.

六、(本题满分 8 分)

【解析】方程两边对 x 求导, 得

$$3y^2 y' - 2yy' + xy' + y - x = 0, (3y^2 - 2y + x)y' + y - x = 0. \quad ①$$

令 $y' = 0$, 得 $y = x$, 代入原方程得 $2x^3 - x^2 - 1 = 0$, 解之得唯一驻点 $x = 1$; 对①两边再求导又得

$$(3y^2 - 2y + x)y'' + (3y^2 - 2y + x)'_x y' + y' - 1 = 0. \quad ②$$

以 $x = y = 1, y' = 0$ 代入②得

$$2y'' - 1 = 0, \quad y'' \Big|_{x=1} = \frac{1}{2} > 0,$$

$x = 1$ 是极小点.

【相关知识】1. 驻点: 通常称导数等于零的点为函数的驻点(或稳定点, 临界点).

2. 函数在驻点处取得极大值或极小值的判定定理.

当函数 $f(x)$ 在驻点处的二阶导数存在且不为零时, 可以利用下述定理来判定 $f(x)$ 在驻点处取得极大值还是极小值.

定理: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数且 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$, 那么

(1) 当 $f''(x_0) < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;

(2) 当 $f''(x_0) > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

七、(本题满分 8 分)

【解析】 首先证明 $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$:

方法一: 用零点定理. 主要是要证明 $f(x)$ 在 (a, b) 有正值点与负值点. 不妨设 $f'(a) > 0$,

$f'(b) > 0$.

由 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) = f'(a) > 0$ 与极限局部保号性, 知在 $x = a$ 的某右邻域, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, 从而 $f(x) > 0$, 因而 $\exists x_1, b > x_1 > a, f(x_1) > 0$; 类似地, 由 $f'(b) > 0$ 可证

$\exists x_2, x_1 < x_2 < b, f(x_2) < 0$. 由零点定理, $\exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$.

方法二: 反证法. 假设在 (a, b) 内 $f(x) \neq 0$, 则由 $f(x)$ 的连续性可得 $f(x) > 0$, 或 $f(x) < 0$,

不妨设 $f(x) > 0$. 由导数定义与极限局部保号性,

$$\begin{aligned} f'(a) = f'_+(a) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{x - a} \geq 0, \\ f'(b) = f'_-(b) &= \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{x - b} \leq 0, \end{aligned}$$

从而 $f'(a)f'(b) \leq 0$, 与 $f'(a)f'(b) > 0$ 矛盾.

其次, 证明 $\exists \eta \in (a, b)$, $f''(\eta) = 0$:

由于 $f(a) = f(\xi) = f(b) = 0$, 根据罗尔定理,

$\exists \eta_1 \in (a, \xi), \eta_2 \in (\xi, b)$, 使 $f'(\eta_1) = f'(\eta_2) = 0$; 又由罗尔定理,

$\exists \eta \in (\eta_1, \eta_2) \subset (a, b)$, $f''(\eta) = 0$.

注: 由 $f'(x_0) > 0$ 可得: 在 $(x_0 - \delta, x_0)$, $f(x) < f(x_0)$; 在 $(x_0, x_0 + \delta)$, $f(x) > f(x_0)$. 注意

由 $f'(x_0) > 0$ 得不到 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 单调增的结果!

【相关知识点】 1. 零点定理: 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号(即

$f(a) \cdot f(b) < 0$), 那么在开区间 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使 $f(\xi) = 0$.

2. 函数极限的局部保号性定理: 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 那么存在常数 $\delta > 0$,

使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

3. 函数极限局部保号性定理的推论: 如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 而且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

4. 罗尔定理: 如果函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a, b) 内可导;

(3) 在区间端点处的函数值相等, 即 $f(a) = f(b)$,

那么在 (a, b) 内至少有一点 ξ ($a < \xi < b$), 使得 $f'(\xi) = 0$.

八、(本题满分 8 分)

【解析】 (1) $y' + ay = f(x)$ 为一阶线性非齐次微分方程, 可直接利用通解公式求解. 通解为

$$y(x) = e^{-ax} \left[\int f(x) e^{ax} dx + C \right] = e^{-ax} [F(x) + C],$$

其中 $F(x)$ 是 $f(x)e^{ax}$ 的任一原函数, 由 $y(0) = 0$ 得 $C = -F(0)$, 故

$$y(x) = e^{-ax} [F(x) - F(0)] = e^{-ax} \int_0^x e^{at} f(t) dt.$$

(2) 当 $x \geq 0$ 时, $|y(x)| = |e^{-ax}| \cdot \left| \int_0^x e^{at} f(t) dt \right| \leq e^{-ax} \int_0^x e^{at} |f(t)| dt$

$$\leq k e^{-ax} \cdot \int_0^x e^{at} dt = k e^{-ax} \cdot \left(\frac{1}{a} e^{at} \Big|_0^x \right) = \frac{k}{a} (1 - e^{-ax}).$$

【相关知识点】 一阶线性非齐次方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的通解为

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right), \quad \text{其中 } C \text{ 为任意常数.}$$