

1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题解析

一、填空题(本题共 5 分, 每小题 3 分, 满分 15 分. 把答案在题中横线上.)

(1) 【答案】 $e^{f(x)} \left[\frac{1}{x} f'(\ln x) + f'(x) f(\ln x) \right] dx$

【解析】 题目考察复合函数的微分法, 利用链式法则计算如下:

由 $y = f(\ln x)e^{f(x)}$ 可知

$$\begin{aligned} dy &= \frac{1}{x} f'(\ln x) e^{f(x)} dx + f(\ln x) e^{f(x)} f'(x) dx \\ &= e^{f(x)} \left[\frac{1}{x} f'(\ln x) + f'(x) f(\ln x) \right] dx. \end{aligned}$$

(2) 【答案】 $\frac{\pi}{4-\pi}$

【分析】 本题中 $\int_0^1 f(x) dx$ 是个常数, 只要定出这个数问题就解决了.

【解析】 令 $\int_0^1 f(x) dx = A$, 则 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + A\sqrt{1-x^2}$, 两边从 0 到 1 作定积分得

$$A = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + A \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 + \frac{\pi}{4} A = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} A,$$

解得 $A = \frac{\pi}{4-\pi}$.

【评注】 本题主要考查定积分的概念和计算. 本题中出现的积分 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ 表示单位圆在第一象限部分的面积, 可直接根据几何意义求得. 考生务必注意这种技巧的应用.

(3) 【答案】 $y_t = C + (t-2)2^t$

【解析】 对应的齐次差分方程是 $y_{t+1} - y_t = 0$, 显然有不恒等于零的特解 $\overline{y_t} = 1$.

因方程的右端函数 $f(t) = t2^t$, 可设非齐次差分方程的特解有形式

$$y^* = (At + B)2^t,$$

代入方程得 $(At + 2A + B)2^t = t2^t$, $t = 0, 1, 2, \dots$. 由于 $2^t \neq 0$, 于是

$$At + 2A + B = t, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

可确定 $A = 1, B = -2$, 即非齐次差分方程有一个特解是 $y^* = (t-2)2^t$.

从而, 差分方程的通解是 $y_t = C + (t-2)2^t$.

(4) 【答案】 $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$

【解析】二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 对应的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{t}{2} \\ 0 & \frac{t}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

因为 f 正定 $\Leftrightarrow A$ 的顺序主子式全大于零. 又

$$\Delta_1 = 2, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \Delta_3 = |A| = 1 - \frac{1}{2}t^2,$$

故 f 正定 $\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}t^2 > 0$, 即 $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$.

(5) 【答案】 t 分布, 参数为 9

【解析】由 $X_1, \dots, X_9$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 故 $X_1, \dots, X_9$ 独立, 且都服从正态分布 $N(0, 3^2)$. 类似有 $Y_1, \dots, Y_9$ 相互独立, 且都服从正态分布 $N(0, 3^2)$.

又因服从正态分布的独立随机变量的线性组合也服从正态分布, 即

$$X' = X_1 + \dots + X_9 \sim N(\mu, \sigma^2).$$

其中 $\mu = E(X') = E(X_1 + \dots + X_9)$, $\sigma^2 = D(X') = D(X_1 + \dots + X_9)$.

由期望的性质, $\mu = E(X') = E(X_1 + \dots + X_9) = EX_1 + EX_2 + \dots + EX_9 = 0$;

由独立随机变量方差的性质, $\sigma^2 = D(X') = D(X_1 + \dots + X_9) = DX_1 + \dots + DX_9 = 81$,

故 $X' \sim N(0, 9^2)$.

因 $Y_1, \dots, Y_9 \sim N(0, 3^2)$, 故 $\frac{Y_i - 0}{3} \sim N(0, 1), (i = 1, 2, \dots, 9)$, 所以,

$$Y' = \sum_{i=1}^9 \left(\frac{Y_i}{3} \right)^2 \sim \chi^2(9).$$

由 t 分布的定义, 现已有 $X' \sim N(0, 9^2)$, 将其标准化得 $\frac{X' - 0}{9} \sim N(0, 1)$, 故 $\frac{\frac{X' - 0}{9}}{\sqrt{Y'/9}} \sim t(9)$.

化简有 $\frac{X'}{\sqrt{9Y'}} \sim t(9)$, 即 $\frac{X_1 + \dots + X_9}{\sqrt{9 \cdot \frac{1}{9}(Y_1^2 + \dots + Y_9^2)}} = \frac{X_1 + \dots + X_9}{\sqrt{Y_1^2 + \dots + Y_9^2}} \sim t(9)$.

【相关知识点】 1. 数学期望的性质: $E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c$, 其中 a, b, c 为常数.

2. 方差的性质: X 与 Y 相互独立时, $D(aX+bY+c)=a^2D(X)+b^2D(Y)$, 其中 a, b, c 为常数.

3. χ^2 分布的定义: 若 $Z_1, \dots, Z_n$ 相互独立, 且都服从标准正态分布 $N(0,1)$, 则

$$Z_i^2 \sim \chi^2(1), \sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi^2(n).$$

4. 若 $Z \sim N(u, \sigma^2)$, 则 $\frac{Z-u}{\sigma} \sim N(0,1)$.

5. t 分布的定义: 若 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$, X, Y 独立, 则 $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$.

二、选择题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) **【答案】** (B)

【分析】 只要求出极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 就能判断出正确的选项.

【解析】 用变上限积分求导公式及重要的等价无穷小关系, 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{1-\cos x} \sin t^2 dt}{\frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x) \sin(1-\cos x)^2}{x^4(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1-\cos x)^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4}x^5}{x^4} = 0, \end{aligned}$$

故应选 (B).

【相关知识点】 1. 对积分上限的函数的求导公式: 若 $F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x)dx$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 均一阶可导, 则

$$F'(t) = \beta'(t) \cdot f[\beta(t)] - \alpha'(t) \cdot f[\alpha(t)].$$

2. 无穷小的比较:

设在同一个极限过程中, $\alpha(x), \beta(x)$ 为无穷小且存在极限 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = l$,

(1) 若 $l \neq 0$, 称 $\alpha(x), \beta(x)$ 在该极限过程中为同阶无穷小;

(2) 若 $l = 1$, 称 $\alpha(x), \beta(x)$ 在该极限过程中为等价无穷小, 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

(3) 若 $l=0$, 称在该极限过程中 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小, 记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 不存在 (不为 ∞), 称 $\alpha(x), \beta(x)$ 不可比较.

(2) 【答案】(C)

【解析】题目考察抽象函数的凹凸性和单调性的问题.

方法 1: 由 $f(-x)=f(x)$ ($-\infty, +\infty$) 知, $f(x)$ 的图形关于 y 轴对称. 由在 $(-\infty, 0)$ 内,

$f'(x)>0$ 且 $f''(x)<0$ 知, $f(x)$ 的图形在 $(-\infty, 0)$ 内单调上升且是凸的; 由对称性知, 在

$(0, +\infty)$ 内, $f(x)$ 的图形单调下降, 且是凸的, 所以应选 (C).

方法 2: 由 $f(-x)=f(x)$ 可知 $-f'(-x)=f'(x), f''(-x)=f''(x)$.

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $-x \in (-\infty, 0)$, 此时由题设知 $f'(-x)>0, f''(-x)<0$, 则

$$f'(x)<0, f''(x)<0, x \in (0, +\infty),$$

故应选 (C).

方法 3: 排除法. 取 $f(x)=-x^2$, 易验证 $f(x)$ 符合原题条件, 计算可知 (A)、(B)、(D) 三个选项均不正确, 故应选 (C).

方法 4: 由题设可知 $f(x)$ 是一个二阶可导的偶函数, 则 $f'(x)$ 为奇函数, $f''(x)$ 为偶函数, 又在 $(-\infty, 0)$ 内 $f'(x)>0, f''(x)<0$, 则在 $(0, +\infty)$ 内 $f'(x)<0, f''(x)<0$, 故应选 (C).

(3) 【答案】(C)

【分析】这一类题目最好把观察法与 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)C$ 技巧相结合.

【解析】对于 (A), $(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_1) = 0$, 即存在一组不全为零的数 1, -1, 1, 使得等式为零, 根据线性相关的定义可知 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ 线性相关, 排除 (A);

对于 (B), $(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_2 + \alpha_3) - (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) = 0$, 即存在一组不全为零的数 1, 1, -1, 使得等式为零, 根据线性相关的定义可知 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$ 线性相关, 排除 (B);

对于 (C), 简单的加加减减得不到零, 就不应继续观察下去, 而应立即转为计算行列式. 设有数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1(\alpha_1 + 2\alpha_2) + k_2(2\alpha_2 + 3\alpha_3) + k_3(\alpha_1 + 3\alpha_3) = 0,$$

整理得 $(k_1 + k_3)\alpha_1 + (2k_1 + 2k_2)\alpha_2 + (3k_2 + 3k_3)\alpha_3 = 0$.

已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 上式成立, 当且仅当
$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ 2k_1 + 2k_2 = 0 \\ 3k_2 + 3k_3 = 0 \end{cases} \quad \text{①}$$

因①的系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$, 故①有唯一零解, 即 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. 故原向量组

$\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关. 应选 (C).

或者也可以将 $\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 且写成矩阵形式, 有

$$[\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \stackrel{\text{记}}{=} [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] C,$$

$|C| = 12 \neq 0$, 则 C 可逆, 故两向量组是等价向量组, 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关知 $\alpha_1 + 2\alpha_2,$

$2\alpha_2 + 3\alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关.

(4) 【答案】(D)

【解析】方法 1: 用排除法. 任意两个同阶可逆矩阵不具备乘法的交换律, 不一定相似, 也不一定合同.

例如, 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, 由于特征值不同, 故不相似, 又对应二次型的正、负

惯性指数不同, 故也不合同, (B)、(C) 不成立;

若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, 则

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, AB \neq BA.$$

故 (A) 不成立; 应取 (D).

方法 2: 因 A, B 是同阶 (设为 n) 可逆阵, 故有 $r(A) = r(B) = n$, 而

$$r(A) = r(B) \Leftrightarrow A, B \text{ 等价} \Leftrightarrow \text{存在可逆阵 } P, Q \text{ 使得 } PAQ = B.$$

(这里只需取 $P = A^{-1}, Q = B$, 既有 $PAQ = A^{-1}BA = B$ 成立), 故应选 (D).

或者, 因 A, B 是同阶可逆阵, 故 A, B 均可以通过初等行变换化成单位阵,

$$\overset{\text{行变换}}{A} \rightarrow E, \overset{\text{行变换}}{B} \rightarrow E,$$

即存在初等阵 $P = P_1, P_2, \dots, P_s, W = W_1, W_2 \dots W_r$, 使得

$$PA = E, WB = E,$$

从而有 $PA = E = WB$, 得 $PAW^{-1} = PAQ = B$ ($W^{-1} = Q$). 故 (D) 成立.

(5) 【答案】(A)

【解析】因 X 和 Y 相互独立, 而

$$P\{X = -1\} = P\{Y = -1\} = \frac{1}{2}, P\{X = 1\} = P\{Y = 1\} = \frac{1}{2},$$

故有:

$$P\{X = -1, Y = -1\} = P\{X = -1\}P\{Y = -1\} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

$$P\{X = -1, Y = 1\} = P\{X = -1\}P\{Y = 1\} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

$$P\{X = 1, Y = -1\} = P\{X = 1\}P\{Y = -1\} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

$$P\{X = 1, Y = 1\} = P\{X = 1\}P\{Y = 1\} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

$$P\{X = Y\} = P\{X = -1, Y = -1\} + P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

故 (A) 正确, (B) 错;

$$P\{X + Y = 0\} = P\{X = -1, Y = 1\} + P\{X = 1, Y = -1\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

故 (C) 错;

$$P\{XY = 1\} = P\{X = -1, Y = -1\} + P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

故 (D) 错.

三、(本题满分 6 分.)

【分析】要证明 $\lim_{x \rightarrow 0} Q(x) = \overline{Q}$, 只须证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln Q(x) = \ln \overline{Q}$ 即可, 因为 $Q(x)$ 为指数函数, 因此化为对数形式便于极限计算.

【解析】因为 $\ln Q(x) = \ln A - \frac{1}{x} \ln[\delta K^{-x} + (1 - \delta)L^{-x}]$, 而且

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[\delta K^{-x} + (1 - \delta)L^{-x}]}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\delta K^{-x} \ln K - (1 - \delta)L^{-x} \ln L}{\delta K^{-x} + (1 - \delta)L^{-x}} \\ &= -\delta \ln K - (1 - \delta) \ln L = -\ln(K^\delta L^{1-\delta}), \end{aligned}$$

所以, $\lim_{x \rightarrow 0} \ln Q(x) = \ln A + \ln(K^\delta L^{1-\delta}) = \ln(AK^\delta L^{1-\delta})$,

于是, $\lim_{x \rightarrow 0} Q(x) = AK^\delta L^{1-\delta} = \bar{Q}$.

四、(本题满分 5 分.)

【解析】由题设有

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dx}. \quad (*)$$

在 $e^{xy} - y = 0$ 中, 将 y 视为 x 的函数, 两边对 x 求导, 得

$$e^{xy} \left(y + x \frac{dy}{dx} \right) - \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{ye^{xy}}{1 - xe^{xy}} = \frac{y^2}{1 - xy}. \quad (1)$$

在 $e^z - xz = 0$ 中, 将 z 视为 x 的函数, 两边对 x 求导, 得

$$e^z \frac{dz}{dx} - z - x \frac{dz}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z}{e^z - x} = \frac{z}{xy - x}. \quad (2)$$

将 (1)、(2) 两式代入 (*) 式, 得

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y^2}{1 - xy} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{z}{xy - x} \frac{\partial f}{\partial z}.$$

【相关知识点】 1. 多元复合函数求导法则: 若 $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$ 在点 (x, y) 处偏导数

存在, 函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 具有连续偏导数, 则复合函数 $z = f[u(x, y), v(x, y)]$

在点 (x, y) 处的偏导数存在, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

五、(本题满分 6 分)

【分析】要求获得最大利润时的销售量, 需写出利润与销售量之间的关系 $\pi(x)$, 它是商品销售总收入减去成本和政府税收. 正确写出 $\pi(x)$ 后, 满足 $\pi'(x_0) = 0$ 的 x_0 即为利润最大时的销售量, 此时, $x_0(t)$ 是 t 的函数, 当商家获得最大利润时, 政府税收总额 $T = tx(t)$, 再由导数知识即可求出既保证商家获利最多, 又保证政府税收总额达到最大的税值 t .

【解析】(1) 设 T 为总税额, 则 $T = tx$. 商品销售总收入为

$$R = px = (7 - 0.2x)x = 7x - 0.2x^2.$$

利润函数为 $\pi = R - C - T = 7x - 0.2x^2 - 3x - 1 - tx = -0.2x^2 + (4-t)x - 1$.

令 $\pi'(x) = 0$, 即 $-0.4x + 4 - t = 0$, 得 $x = \frac{4-t}{0.4} = \frac{5}{2}(4-t)$.

由于 $\pi''(x) = -0.4 < 0$, 因此, $x = \frac{5}{2}(4-t)$ 即为利润最大时的销售量.

(2) 将 $x = \frac{5}{2}(4-t)$ 代入 $T = tx$, 得 $T = t \cdot \frac{5}{2}(4-t) = 10t - \frac{5}{2}t^2$.

由 $T'(t) = 10 - 5t = 0$, 得惟一驻点 $t = 2$; 由于 $T''(t) = -5 < 0$, 可见当 $t = 2$ 时 T 有极大值, 这时也是最大值, 此时政府税收总额最大.

六、(本题满分 6 分)

【分析】当 $x > 0$ 时, $F(x)$ 显然连续, 故只要证 $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = F(0)$, 且当 $x > 0$ 时, $F'(x) \geq 0$ 即可.

【解析】方法 1: 显然 $x > 0$ 时, $F(x)$ 连续, 又由洛必达法则知

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x t^n f(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n f(x) = 0 = F(0),$$

所以 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续.

当 $x \in (0, +\infty)$ 时,

$$F'(x) = \frac{x^{n+1} f(x) - \int_0^x t^n f(t) dt}{x^2} = \frac{x^{n+1} f(x) - \xi^n f(\xi)x}{x^2}, \quad 0 < \xi < x.$$

由于 $f(x)$ 单调不减, 故 $f(x) \geq f(\xi)$, 又 $x^n > \xi^n$, 从而 $x^n f(x) \geq \xi^n f(\xi)$.

于是有 $F'(x) \geq 0$ ($0 < x < +\infty$). 故 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调不减.

方法 2: 连续性证明同上. 由于

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{x^{n+1} f(x) - \int_0^x t^n f(t) dt}{x^2} \\ &= \frac{\int_0^x x^n f(x) dt - \int_0^x t^n f(t) dt}{x^2} = \frac{\int_0^x [x^n f(x) - t^n f(t)] dt}{x^2} \geq 0, \end{aligned}$$

可见, $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调不减.

【评注】本题主要考查变上限定积分求导, 洛必达法则. 请考生注意本题两种证法中对于 $F'(x)$ 的不同处理方法.

【相关知识点】 1. 对积分上限的函数的求导公式: 若 $F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x)dx$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 均一阶可导, 则

$$F'(t) = \beta'(t) \cdot f[\beta(t)] - \alpha'(t) \cdot f[\alpha(t)].$$

七、(本题满分 6 分)

【分析】 先作出草图, 再求出曲线 $y = x^2$ 在任一点 (a, a^2) 上的切线方程及其与 x 轴的交点, 然后依此类推, 得出一系列与 x 轴交点的坐标. 最后进行相应计算即可.

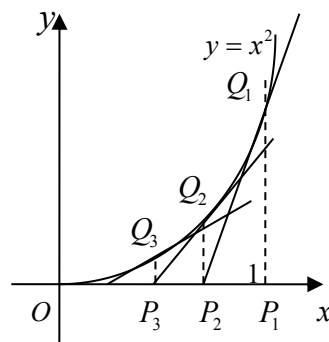
【解析】 (1) 由 $y = x^2$, 得 $y' = 2x$. 对于任意 $a (0 < a \leq 1)$,

抛物线 $y = x^2$ 在点 (a, a^2) 处的切线方程为

$$y - a^2 = 2a(x - a).$$

且该切线与 x 轴的交点为 $(\frac{a}{2}, 0)$, 故由 $\overline{OP_1} = 1$ 可见

$$\begin{aligned}\overline{OP_2} &= \frac{1}{2} \overline{OP_1} = \frac{1}{2}, \\ \overline{OP_3} &= \frac{1}{2} \overline{OP_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}, \\ &\dots\dots\dots \\ \overline{OP_n} &= \frac{1}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$



(2) 由于 $\overline{Q_n P_n} = (\overline{OP_n})^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2} = \frac{1}{4^{n-1}}$, 可见

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{Q_n P_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^m.$$

利用几何级数求和公式 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} (|x| < 1)$ 即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{Q_n P_n} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^m = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

【评注】 本题是级数与微分学的综合题, 本题中所得的级数仍为收敛的几何级数, 利用几何级数求和公式即可求出它的和.

八、(本题满分 6 分)

【解析】 将直角坐标化为极坐标, 由于

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2t} f\left(\frac{r}{2}\right) r dr = 2\pi \int_0^{2t} r f\left(\frac{r}{2}\right) dr,$$

可得 $f(t) = e^{4\pi t^2} + 2\pi \int_0^{2t} r f\left(\frac{r}{2}\right) dr$. 在积分中作换元 $s = \frac{r}{2}$, 又有

$$\int_0^{2t} r f\left(\frac{r}{2}\right) dr = 4 \int_0^t s f(s) ds.$$

于是, $f(t)$ 满足积分关系式 $f(t) = 8\pi \int_0^t s f(s) ds + e^{4\pi t^2}$.

在上式中令 $t=0$ 得 $f(0)=1$. 利用变上限积分的求导公式, 将上式两端对 t 求导, 得

$$f'(t) - 8\pi t f(t) = 8\pi t e^{4\pi t^2}.$$

上述方程为关于 $f(t)$ 的一阶线性微分方程, 利用一阶线性微分方程通解公式, 得

$$f(t) = (4\pi t^2 + C)e^{4\pi t^2}, \text{ 其中常数 } C \text{ 待定.}$$

由 $f(0)=1$ 可确定常数 $C=1$, 因此, $f(t) = (4\pi t^2 + 1)e^{4\pi t^2}$.

【相关知识点】 1. 对积分上限的函数的求导公式: 若 $F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x) dx$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 均一阶可导, 则

$$F'(t) = \beta'(t) \cdot f[\beta(t)] - \alpha'(t) \cdot f[\alpha(t)].$$

2. 一阶线性非齐次微分方程的标准形式为 $y' + p(x)y = q(x)$, 其通解公式为

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left(\int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C \right), \text{ 其中 } C \text{ 为常数.}$$

九、(本题满分 6 分)

【解析】 (1) 由 $AA^* = A^*A = |A|E$ 及 $A^* = |A|A^{-1}$, 有

$$\begin{aligned} PQ &= \begin{bmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \alpha \\ -\alpha^T A^* A + |A| \alpha^T & -\alpha^T A^* \alpha + b |A| \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & \alpha \\ 0 & |A|(b - \alpha^T A^{-1} \alpha) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 用行列式拉普拉斯展开式及行列式乘法公式, 有

$$|P| = \begin{vmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{vmatrix} = |A|,$$

$$|P||Q|=|PQ|=\begin{vmatrix} A & \alpha \\ 0 & |A|(b-\alpha^T A^{-1}\alpha) \end{vmatrix}=|A|^2(b-\alpha^T A^{-1}\alpha)$$

又因 A 是非奇异矩阵, 所以 $|A| \neq 0$, 故 $|Q|=|A|(b-\alpha^T A^{-1}\alpha)$.

由此可知 Q 可逆的充要条件是 $|Q| \neq 0$, 即 $b-\alpha^T A^{-1}\alpha \neq 0$, 亦即 $\alpha^T A^{-1}\alpha \neq b$.

评注: 本题考查分块矩阵的运算, 要分清 $\alpha^T A^{-1}\alpha$ 是 1 阶矩阵, 是一个数.

【相关知识点】 1. 两种特殊的拉普拉斯展开式: 设 A 是 m 阶矩阵, B 是 n 阶矩阵, 则

$$\begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|, \quad \begin{vmatrix} O & A \\ B & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| \cdot |B|.$$

2. 行列式乘积公式: 设 A, B 是两个 n 阶矩阵, 则乘积 AB 的行列式等于 A 和 B 的行列式的乘积, 即 $|AB|=|A||B|$.

十、(本题满分 10 分)

【解析】 (1) 设 A 的属于 $\lambda=3$ 的特征向量为 $\alpha_3=[x_1, x_2, x_3]^T$, 因为实对称矩阵属于不同特征值的特征向量相互正交, 故

$$\begin{cases} \alpha_1^T \alpha_3 = -x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ \alpha_2^T \alpha_3 = x_1 - 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

解上述方程组, 设方程组的系数矩阵为 $B=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, 对 B 进行初等行变换:

$$B=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

系数矩阵的秩为 2, 根据基础解系的个数与系数矩阵秩之间的关系, 我们得到基础解系的个数为 1, 解得 $[1, 0, 1]^T$, 即 A 的对应于 $\lambda=3$ 的特征向量为 $\alpha_3=k[1, 0, 1]^T$, 其中 k 为非零常数.

$$(2) \text{方法 1: 令 } P=[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则有 } P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}=\Lambda,$$

即 $A=P\Lambda P^{-1}$, 其中 P^{-1} 计算如下:

$$\begin{aligned}
[P; E] &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} [2]+[1] \times (-1) \\ [3]+[1] \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{\begin{smallmatrix} [3] \times \frac{1}{2} \\ [2]+[3] \times (-1) \\ [1]+[3] \times (-1) \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} [2] \times (-\frac{1}{3}) \\ [1]+[2] \times (-1) \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

得 $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix},$

$$A = P \Lambda P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 13 & -2 & 5 \\ -2 & 10 & 2 \\ 5 & 2 & 13 \end{bmatrix}.$$

方法 2: 因 A 是对称矩阵, 不同特征值对应的特征向量互相正交, 故存在正交阵 Q (对 P 单位

化), 使 $Q^{-1} A Q = Q^T A Q = \Lambda$, $A = Q \Lambda Q^T$, 其中 $Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$

$$\begin{aligned}
A = Q \Lambda Q^T &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 13 & -2 & 5 \\ -2 & 10 & 2 \\ 5 & 2 & 13 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

方法 3: 由于矩阵 A 的特征值是 1, 2, 3, 特征向量依次为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 利用分块矩阵有

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, 2\alpha_2, 3\alpha_3).$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是不同特征值的特征向量, 它们线性无关, 于是矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 可逆. 故

$$\begin{aligned} A &= (\alpha_1, 2\alpha_2, 3\alpha_3)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 13 & -2 & 5 \\ -2 & 10 & 2 \\ 5 & 2 & 13 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

【评注】本题有两个难点, 一是能否由“实对称矩阵”挖掘出隐含的信息, 通过正交性求出 α_3 , 另一个难点就是反求矩阵 A .

十一、(本题满分 7 分)

【分析】求分布函数 $F(x) = P\{X \leq x\}$ 实质上是求 $\{X \leq x\}$ 的概率.

【解析】由 X 的绝对值不大于 1, 可得

$$\text{当 } x < -1 \text{ 时, } F(x) = P\{X \leq x\} = 0;$$

$$\text{当 } x \geq 1 \text{ 时, } F(x) = P\{X \leq x\} = 1;$$

$$\text{又 } P\{X = -1\} = \frac{1}{8}, P\{X = 1\} = \frac{1}{4}, \text{ 则}$$

$$P\{-1 < x < 1\} = 1 - P\{X = -1\} - P\{X = 1\} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8};$$

由题意 X 在 $(-1, 1)$ 内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比, 那么当

X 的值属于 $(-1, 1)$ 的条件下, 事件 $\{-1 < X \leq x\}$ 的条件概率为:

$$P\{-1 < X \leq x | -1 < X < 1\} = k \frac{x - (-1)}{1 - (-1)} = k \frac{x+1}{2} \quad (\text{其中 } k \text{ 为比例正常数}),$$

$$\text{又 } P\{-1 < X < 1 | -1 < X < 1\} = 1,$$

$$\text{而 } P\{-1 < X < 1 | -1 < X < 1\} = k \frac{1+1}{2} = k,$$

$$\text{所以 } k = 1, \text{ 故 } P\{-1 < X \leq x | -1 < X < 1\} = \frac{x+1}{2};$$

$$\text{当 } -1 < x < 1 \text{ 时, } \{-1 < X \leq x\} = \{-1 < X \leq x\} \cap \{-1 < X < 1\},$$

$$\text{所以 } P\{-1 < X \leq x\} = P\{-1 < X \leq x, -1 < X < 1\}.$$

由条件概率公式, 有

$$\begin{aligned}
 P\{-1 < X \leq x\} &= P\{-1 < X \leq x, -1 < X < 1\} \\
 &= P\{-1 < X \leq x \mid -1 < X < 1\} P\{-1 < X < 1\} \\
 &= \frac{x+1}{2} \times \frac{5}{8} = \frac{5x+5}{16},
 \end{aligned}$$

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X \leq -1\} + P\{-1 < X \leq x\},$$

而 $P\{X \leq -1\} = P\{X = -1\} + P\{X < -1\} = \frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{8},$

所以 $F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X \leq -1\} + P\{-1 < X \leq x\} = \frac{1}{8} + \frac{5x+5}{16} = \frac{5x+7}{16},$

故所求的 X 的分布函数为
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{5x+7}{16}, & -1 \leq x < 1. \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

十二、(本题满分 6 分)

【解析】已知 X 在 $[0, 60]$ 上均匀分布, 则其密度函数为:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{60}, & 1 \leq x \leq 60, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

设 Y 表示游客等候电梯的时间(单位: 分钟), 由于电梯于每个整点的第 5 分钟, 25 分钟, 55 分钟起行, 则

当 $0 \leq X \leq 5$ 时, 游客需等候时间 $Y = 5 - X$;

当 $5 < X \leq 25$ 时, 游客需等候时间 $Y = 25 - X$;

当 $25 < X \leq 55$ 时, 游客需等候时间 $Y = 55 - X$;

当 $55 < X \leq 60$ 时, 游客需等候时间 $Y = 60 - X + 5 = 65 - X$ (这个时间段到达, 就需要等下个整点的第 5 分钟, 所以是 $60 - X + 5$).

故 Y 是关于到达时刻 X 的函数:
$$Y = g(X) = \begin{cases} 5 - X, & 0 \leq X \leq 5, \\ 25 - X, & 5 < X \leq 25, \\ 55 - X, & 25 < X \leq 55, \\ 65 - X, & 55 < X \leq 60. \end{cases}$$

由随机变量函数期望的定义, 有

$$\begin{aligned}
 EY &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{60}g(x)dx = \frac{1}{60} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx \\
 &= \frac{1}{60} \left[\int_0^5 (5-x)dx + \int_5^{25} (25-x)dx + \int_{25}^{55} (55-x)dx + \int_{55}^{60} (65-x)dx \right] \\
 &= \frac{1}{60} (12.5 + 200 + 450 + 37.5) = 11.67.
 \end{aligned}$$

【相关知识点】1. 随机变量函数期望的定义:

若随机变量 $Y = g(X)$, 且 EY 存在, 则有 $EY = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$.

十三、(本题满分 6 分)

【解析】设 X_1 和 X_2 表示先后开动的记录仪无故障工作的时间, 则两台记录仪无故障工作的

总时间为 $T = X_1 + X_2$.

由于每台无故障工作的时间都服从参数为 5 的指数分布, 则 X_1 和 X_2 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 5e^{-5x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

因为两台仪器是独立的, 则其无故障工作的时间显然也是相互独立的, 即 X_1 和 X_2 独立, 应用

两个独立随机变量之和的卷积公式:

当 $t > 0$ 时, T 的概率密度为

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx = 25 \int_0^t e^{-5x}e^{-5(t-x)}dx = 25te^{-5t}.$$

当 $t \leq 0$ 时, $f(t) = 0$, 即

$$f(t) = \begin{cases} 25te^{-5t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

由指数分布的期望和方差的结论, 有

$$EX_1 = EX_2 = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5}, \quad DX_1 = DX_2 = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{25},$$

由期望的性质, 有

$$ET = E(X_1 + X_2) = EX_1 + EX_2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5},$$

由独立随机变量方差的性质, 有

$$DT = D(X_1 + X_2) = DX_1 + DX_2 = \frac{1}{25} + \frac{1}{25} = \frac{2}{25}.$$

【相关知识点】1. 指数分布的期望和方差的结论:

若 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则其期望 $EX = \frac{1}{\lambda}$, 方差 $DX = \frac{1}{\lambda^2}$.

2. X 与 Y 相互独立, 数学期望和方差的性质:

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c,$$

$$D(aX + bY + c) = a^2D(X) + b^2D(Y),$$

其中 a, b, c 为常数.