

1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题(本题共 5 分, 每小题 3 分, 满分 15 分. 把答案在题中横线上.)

(1) 【答案】 $e^{-\frac{1}{2}}$

【解析】由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 故

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\cos x)^{x^{-2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x^{-2} \ln \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln \cos x}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}} \quad \text{洛必达} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{2x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin x}{2x \cos x}} = e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

【相关知识点】1. 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续:

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点

x_0 连续.

2. 如果函数在 x_0 处连续, 则有 $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0)$.

(2) 【答案】 $-\frac{3}{2}$

【解析】题目考察复合函数在某点处的高阶导数, 按照复合函数求导法则具体计算如下:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} [\ln(1-x) - \ln(1+x^2)], \\ y' &= \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} \right) = -\frac{1}{2(1-x)} - \frac{x}{1+x^2}, \\ y'' &= -\frac{1}{2(1-x)^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \quad y''|_{x=0} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

【相关知识点】1. 复合函数求导法则:

如果 $u = g(x)$ 在点 x 可导, 而 $y = f(u)$ 在点 $u = g(x)$ 可导, 则复合函数 $y = f[g(x)]$

在点 x 可导, 且其导数为 $\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x)$ 或 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

(3) 【答案】 $\arcsin \frac{x-2}{2} + C$ 或 $2 \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} + C$

【解析】题目考察不定积分的计算, 分别采用凑微分的方法计算如下:

$$\text{方法 1: 原式} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x-2}{2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}} = \arcsin \frac{x-2}{2} + C.$$

方法 2: 原式 = $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{4-(\sqrt{x})^2}} = 2\int \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{4-(\sqrt{x})^2}} = 2\int \frac{d\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sqrt{1-(\frac{\sqrt{x}}{2})^2}} = 2\arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} + C.$

(4) 【答案】 $\frac{\pi}{8}$

【解析】题目考察广义积分的计算, 采用凑微分的方法, 结合基本微分公式表计算如下:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{4+(x+2)^2} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{d(\frac{x+2}{2})}{1+(\frac{x+2}{2})^2} \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{x+2}{2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

(5) 【答案】 3

【解析】方法 1: 利用初等变换.

以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为行构成 3×4 矩阵, 对其作初等变换:

$$\begin{aligned}A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & t & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{[2]+[1] \times (-2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & t+2 & -2 \\ 0 & -4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{[3]+[2] \times (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & t+2 & -2 \\ 0 & 0 & 3-t & 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

因为 $r(A) = r \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 2$, 所以 $3-t=0, t=3$.

方法 2: 利用秩的定义.

由于 $r \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = r(A) = 2$, 则矩阵 A 中任一三阶子行列式应等于零.

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & t & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -2 \end{bmatrix},$$

应有

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & t \\ 0 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & t+2 \\ 0 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & t+2 \\ 0 & 0 & 3-t \end{vmatrix} = 0,$$

解得 $t = 3$.

方法 3: 利用线性相关性.

因为 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(A) = 2$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, $\Leftrightarrow$ 以 $\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T$ 组成的线性齐次方

程组 $\alpha_1^T x_1 + \alpha_2^T x_2 + \alpha_3^T x_3 = BX = 0$ 有非零解, 因

$$B = [\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} [2]+[1] \times (-2) \\ [3]+[1] \\ [4]+[1] \times (-1) \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & t+2 & 5 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} [2] \times (-\frac{1}{4}) \\ [3]+[2] \times (-t-2) \\ [4]+[2] \times (-2) \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -t+3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

故 $BX = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow t = 3$.

二、选择题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 【答案】(C)

【解析】题目考察无穷小量的性质和无穷小量的比较, 采用洛必达法则计算如下:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^{\tan x - x} - 1}{x^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^n} \stackrel{\text{洛必达}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

$e^{\tan x} - e^x$ 与 x^3 同阶, 故应选 (C).

(2) 【答案】(D)

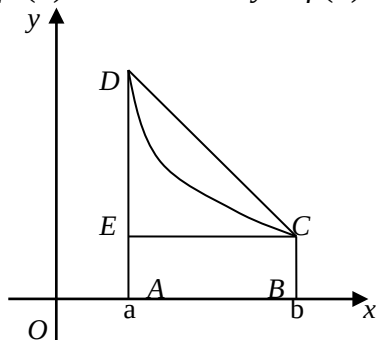
【解析】**方法 1:** 用几何意义. 由 $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ 可知, 曲线 $y = f(x)$ 是上半平面的一段下降的凹弧, $y = f(x)$ 的图形大致如右图.

$S_1 = \int_a^b f(x) dx$ 是曲边梯形 $ABCD$ 的面积;

$S_2 = f(b)(b-a)$ 是矩形 $ABCE$ 的面积;

$S_3 = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)](b-a)$ 是梯形 $ABCD$ 的面积.

由图可见 $S_2 < S_1 < S_3$, 应选 (D).



方法 2: 观察法. 因为是要选择对任何满足条件的 $f(x)$ 都成立的结果, 故可以取满足条件的

特定的 $f(x)$ 来观察结果是什么. 例如取 $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in [1, 2]$, 则

$$S_1 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{1}{4}, S_3 = \frac{5}{8} \Rightarrow S_2 < S_1 < S_3.$$

【评注】本题也可用分析方法证明如下：

由积分中值定理, 至少存在一个点 ξ , 使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$, $a < \xi < b$ 成立, 再由 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 是单调递减的, 故 $f(\xi) > f(b)$, 从而

$$S_1 = \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) > f(b)(b-a) = S_2.$$

为证 $S_3 > S_1$, 令 $\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(a)](x-a) - \int_a^x f(t)dt$, 则 $\varphi(a) = 0$,

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{1}{2}f'(x)(x-a) + \frac{1}{2}(f(x) + f(a)) - f(x) \\ &= \frac{1}{2}f'(x)(x-a) - \frac{1}{2}(f(x) - f(a)) \\ &= \frac{1}{2}f'(x)(x-a) - \frac{1}{2}f'(\eta)(x-a) \quad (a < \eta < x) \text{ (拉格朗日中值定理)} \\ &= \frac{1}{2}(f'(x) - f'(\eta))(x-a),\end{aligned}$$

由于 $f''(x) > 0$, 所以 $f'(x)$ 是单调递增的, 故 $f'(x) > f'(\eta)$, $\varphi'(x) > 0$, 即 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增的. 由于 $\varphi(a) = 0$, 所以 $\varphi(x) > 0$, $x \in [a, b]$, 从而

$$\varphi(b) = \frac{1}{2}[f(b) + f(a)](b-a) - \int_a^b f(t)dt > 0,$$

即 $S_3 > S_1$. 因此, $S_2 < S_1 < S_3$, 应选 (D).

如果题目改为证明题, 则应该用评注所讲的办法去证, 而不能用图证.

【相关知识点】 1. 积分中值定理: 如果函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a, b]$ 上连续, 则在 (a, b) 上至少存在一个点 ξ , 使下式成立: $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ ($a < \xi < b$). 这个公式叫做积分中值公式.

2. 拉格朗日中值定理: 如果函数 $f(x)$ 满足在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 那么在 (a, b) 内至少有一点 ξ ($a < \xi < b$), 使等式 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$ 成立.

3. 拉格朗日中值定理: 如果函数 $f(x)$ 满足在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 那么在 (a, b) 内至少有一点 ξ ($a < \xi < b$), 使等式 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$ 成立.

(3) 【答案】 (B)

【解析】 题目考察函数的极值点与拐点问题, 分析如下:

由 $f'(x_0) = 0$ 知 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的驻点. 把 $x = x_0$ 代入恒等式 $x_0 f''(x_0) = 1 - e^{-x_0}$, 即 $f''(x_0) = \frac{1 - e^{-x_0}}{x_0}$. 由于分子、分母同号, 故 $f''(x_0) > 0$, 因此驻点 $x = x_0$ 为极小值点. 应选

(B).

(4) 【答案】(A)

【解析】由于函数 $e^{\sin t} \sin t$ 是以 2π 为周期的函数, 所以,

$$F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt = \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt,$$

$F(x)$ 的值与 x 无关. 不选 D, (周期函数在一个周期的积分与起点无关).

估计 $\int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$ 的值有多种方法.

方法 1: 划分 $e^{\sin t} \sin t$ 取值正、负区间.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt = \int_0^{\pi} e^{\sin t} \sin t dt + \int_{\pi}^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt \\ &= \int_0^{\pi} e^{\sin t} \sin t dt + \int_0^{\pi} e^{-\sin u} (-\sin u) du \\ &= \int_0^{\pi} (e^{\sin t} - e^{-\sin t}) \sin t dt \end{aligned}$$

当 $0 < t < \pi$ 时, $\sin t > 0$, $e^{\sin t} - e^{-\sin t} > 0$, 所以 $F(x) > 0$. 选 (A).

方法 2: 用分部积分法.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt = - \int_0^{2\pi} e^{\sin t} d \cos t \\ &= -e^{\sin t} \cos t \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t de^{\sin t} \\ &= -e^0(1-1) + \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \cos t^2 dt = \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \cos t^2 dt > 0. \end{aligned}$$

故应选 (A).

【评注】本题的方法 1 十分有代表性.

被积函数在积分区间上可以取到正值与负值时, 则常将积分区间划分成若干个, 使每一个区间内, 被积函数保持确定的符号, 然后再作适当的变量变换, 使几个积分的积分上下限相同, 然后只要估计被积函数的正、负即可.

(5) 【答案】(D)

【解析】题目考察函数的复合问题, 分清内层函数的定义域与值域, 要注意内层函数的值域又构成了外层函数的定义域.

当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^2 > 0$, 则 $g[f(x)] = f(x) + 2 = x^2 + 2$;

当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = -x \leq 0$, 则 $g[f(x)] = 2 - f(x) = 2 - (-x) = 2 + x$.

故 $g[f(x)] = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 0 \\ 2 + x, & x \geq 0 \end{cases}$, 因此应选 (D).

三、(本题共 6 小题, 每小题 5 分, 满分 30 分.)

(1) 【分析】这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限, 可以设法约去分子、分母中极限为 ∞ 的因子, 从而转化为确定型的极限. 于是分子、分母同除 $\sqrt{x^2}$. 在计算过程中应注意 x 趋于负无穷.

【解析】分子、分母同除 $\sqrt{x^2}$, 注意 $\sqrt{x^2} = -x (x < 0)$, 则

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - 1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{\sin x}{x^2}}} = \frac{\sqrt{4} - 1}{1} = 1.$$

(2) 【解析】题目考察参数方程所确定的函数的微分法.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad x'_t = \frac{1}{1+t^2},$$

y'_t 可由第二个方程两边对 t 求导得到:

$$2y'_t - 2tyy'_t - y^2 + e^t = 0,$$

解得 $y'_t = \frac{y^2 - e^t}{2(1-ty)}$. 由此, 有 $y'_x = \frac{(1+t^2)(y^2 - e^t)}{2(1-ty)}$.

(3) 【解析】题目考察, 不定积分的换元与分部积分法, 难度不大, 具体计算如下:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int e^{2x} (\sec^2 x + 2 \tan x) dx = \int e^{2x} \sec^2 x dx + 2 \int e^{2x} \tan x dx \\ &\stackrel{\text{分部}}{=} \int e^{2x} d \tan x + \int \tan x d e^{2x} = e^{2x} \tan x + C. \end{aligned}$$

(4) 【解析】题目考察齐次微分方程的通解, 分别利用齐次方程的求解方法和凑全微分方法计算如下:

方法 1: 所给方程是齐次方程.

令 $y = xu$, 则 $dy = xdu + udx$, 代入原方程得

$$3(1+u-u^2)dx + x(1-2u)du = 0,$$

分离变量得 $\frac{1-2u}{1+u-u^2} du = -\frac{3}{x} dx$,

积分得 $\int \frac{d(1+u-u^2)}{1+u-u^2} = -3 \int \frac{1}{x} dx$,

即 $1+u-u^2 = Cx^{-3}$.

以 $u = \frac{y}{x}$ 代入得通解 $x^2 + xy - y^2 = \frac{C}{x}$.

方法 2: 用凑全微分的方法求解. 由于

$$\begin{aligned} &(3x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy \\ &= 3x^2 dx + (y d(x^2) + x^2 dy) - (y^2 dx + x d(y^2)) \\ &= d(x^3) + d(x^2 y) - d(xy^2) \end{aligned}$$

$$= d(x^3 + x^2y - xy^2),$$

故通解为: $x^3 + x^2y - xy^2 = C$.

(5) 【解析】 $y_1 - y_3 = e^{-x}$ 与 $y_1 - y_2 = e^{2x} - e^{-x}$ 都是相应齐次方程的解, $(y_1 - y_3) + (y_1 - y_2) = e^{2x}$ 也是相应齐次方程的解, e^{-x} 与 e^{2x} 是两个线性无关的相应齐次方程的解; 而 $y_2 - e^{-x} = xe^x$ 是非齐次方程的解. 下面求该微分方程:

方法 1: 由 e^{-x} , e^{2x} 是齐次解, 知 $r_1 = -1, r_2 = 2$ 是特征方程的两个根, 特征方程为

$$(r+1)(r-2)=0, \text{ 即 } r^2 - r - 2 = 0,$$

相应的齐次微分方程为: $y'' - y' - 2y = 0$.

设所求非齐次方程为: $y'' - y' - 2y = f(x)$, 把非齐次解 xe^x 代入, 使得

$$f(x) = (xe^x)'' - (xe^x)' - 2(xe^x) = (1-2x)e^x.$$

所求方程为: $y'' - y' - 2y = (1-2x)e^x$.

方法 2: 由于通解为: $y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + xe^x$, 求出

$$y' = -c_1e^{-x} + 2c_2e^{2x} + (x+1)e^x, \quad y'' = c_1e^{-x} + 4c_2e^{2x} + (x+2)e^x,$$

并消去 c_1, c_2 , 使得微分方程 $y'' - y' - 2y = (1-2x)e^x$.

(6) 【答案】
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

【解析】由题设条件 $A^2 - AB = E$, 把 A 提出来得 $A(A-B) = E$, 因为

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

由此知道 A 是满秩的, 所以 A 可逆, 两边左乘 A^{-1} , 从而有 $A-B = A^{-1}$, $B = A - A^{-1}$.

(或 $A^2 - AB = E$, $AB = A^2 - E$, A 可逆, 两边左乘 A^{-1} , 得 $B = A^{-1}(A^2 - E) = A - A^{-1}$).

用矩阵的初等变换求 A^{-1} .

$$[A:E] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{[1]+[3] \times (-1) \\ [2]+[3]}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{[1]+[2] \times (-1) \\ [3] \times (-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [E:A^{-1}]$$

得 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$

从而得 $B = A - A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

四、(本题满分8分.)

【解析】方法1: 对原方程组的增广矩阵作初等行变换:

$$[A:b] = \begin{bmatrix} 2 & \lambda & -1 & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{[2]+[1] \\ [3]+[1] \times (-5)}} \begin{bmatrix} 2 & \lambda & -1 & 1 \\ \lambda+2 & \lambda-1 & 0 & 3 \\ -6 & -5\lambda+5 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]+[2] \times 5} \begin{bmatrix} 2 & \lambda & -1 & 1 \\ \lambda+2 & \lambda-1 & 0 & 3 \\ 5\lambda+4 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

当 $\lambda \neq -\frac{4}{5}$ 且 $\lambda \neq 1$ 时, $r(A) = r[A:b] = 3$, 即方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩相等且等于未知量的个数, 故原方程组有唯一解.

当 $\lambda = -\frac{4}{5}$ 时, $r(A) = 2 \neq r[A:b] = 3$, 即方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩不相等, 故原方程组无解.

当 $\lambda = 1$ 时, 原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 = 1 \end{cases},$$

原方程组有无穷多解, 其通解为 $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -1 + k, \\ x_3 = k. \end{cases} (k \text{ 为任意常数}).$

(或 $[x_1, x_2, x_3]^T = [1, -1, 0]^T + k[0, 1, 1]^T$ (k 为任意常数))

方法2: 原方程组系数矩阵的行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & \lambda-1 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(5\lambda+4),$$

故知: 当 $\lambda \neq -\frac{4}{5}$ 且 $\lambda \neq 1$ 时, $r(A) = r[A:b] = 3$, 即方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩相等且等于未知量的个数, 故原方程组有唯一解.

当 $\lambda = -\frac{4}{5}$ 时, 对原方程组的增广矩阵作初等行变换, 得

$$[A:b] = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{4}{5} & -1 & : & 1 \\ -\frac{4}{5} & -1 & 1 & : & 2 \\ 4 & 5 & -5 & : & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{[1] \times 5 \\ [2] \times 5}} \begin{bmatrix} 10 & -4 & -5 & : & 5 \\ -4 & -5 & 5 & : & 10 \\ 4 & 5 & -5 & : & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{[3]+[2]} \begin{bmatrix} 10 & -4 & -5 & : & 5 \\ -4 & -5 & 5 & : & 10 \\ 0 & 0 & 0 & : & 9 \end{bmatrix}$$

$r(A) \neq r[A:b]$, 即方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩不相等, 故原方程组无解.

当 $\lambda = 1$ 时, 对原方程组的增广矩阵作初等行变换, 得

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & : & 1 \\ 1 & -1 & 1 & : & 2 \\ 4 & 5 & -5 & : & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{[1] \leftrightarrow [2] \\ [2] + [1] \times (-2) \\ [3] + [1] \times (-4)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 2 \\ 0 & 3 & -3 & : & -3 \\ 0 & 9 & -9 & : & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{[3] + [2] \times 3 \\ [2] \times \frac{1}{3}}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 2 \\ 0 & 1 & -1 & : & -1 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$r(A) = r[A:b] = 2 < 3$, 即方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩相等且小于未知量的个数, 故

$$\text{原方程组有无穷多解, 其通解为 } \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -1 + k, \quad (k \text{ 为任意常数}). \\ x_3 = k. \end{cases}$$

$$(\text{或 } [x_1, x_2, x_3]^T = [1, -1, 0]^T + k[0, 1, 1]^T \quad (k \text{ 为任意常数}))$$

五、(本题满分 8 分)

【解析】由已知条件得 $\frac{1}{2} \int_0^\theta r^2 d\theta = \frac{1}{2} \cdot \int_0^\theta \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$.

两边对 θ 求导, 得 $r^2 = \sqrt{r^2 + r'^2}$ (隐式微分方程),

解出 r' , 得 $r' = \pm r \sqrt{r^2 - 1}$.

分离变量, 得 $\frac{dr}{r\sqrt{r^2-1}} = \pm d\theta$.

由于
$$\int \frac{dr}{r\sqrt{r^2-1}} = -\int \frac{d(\frac{1}{r})}{\sqrt{1-(\frac{1}{r})^2}} = \arccos \frac{1}{r},$$

或
$$\int \frac{dr}{r\sqrt{r^2-1}} \stackrel{r=\sec t}{=} \int dt = t = \arccos \frac{1}{r},$$

两边积分, 得
$$\arccos \frac{1}{r} = \pm \theta + c.$$

代入初始条件 $r(0) = 2$, 得 $c = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, $\Rightarrow \arccos \frac{1}{r} = \frac{\pi}{3} \pm \theta$.

即 L 的极坐标方程为
$$\frac{1}{r} = \cos(\frac{\pi}{3} \pm \theta) = \frac{1}{2} \cos \theta \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta,$$

从而, L 的直角坐标方程为 $x \mp \sqrt{3}y = 2$.

六、(本题满分 8 分)

【解析】由 $xf'(x) = f(x) + \frac{3a}{2}x^2$, 有

$$\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{3a}{2}, \text{ 即 } (\frac{f(x)}{x})' = \frac{3a}{2},$$

从而得
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{3a}{2}x + C, \text{ 即 } f(x) = \frac{3a}{2}x^2 + Cx.$$

又由题设知, 面积

$$S = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (\frac{3a}{2} + Cx)dx = \frac{a}{2} + \frac{C}{2} = 2,$$

得 $C = 4 - a$, 从而 $f(x) = \frac{3a}{2}x^2 + (4 - a)x$.

旋转体体积
$$V(a) = \pi \int_0^1 y^2 dx = \pi \int_0^1 [\frac{3a}{2}x^2 + (4 - a)x]^2 dx = \pi(\frac{a^2}{30} + \frac{a}{3} + \frac{16}{3}).$$

由 $V'(a) = \pi(\frac{a}{15} + \frac{1}{3}) = 0$, 解得惟一驻点 $a = -5$; 又由 $V''(a) = \frac{\pi}{15} > 0$, $a = -5$ 是极小值点

也是最小值点. (易验证, 此时 $f(x) = -\frac{15}{2}x^2 + 9x$ 在 $(0, 1]$ 恒正.)

七、(本题满分 8 分.)

【分析】通过变换将 $\varphi(x)$ 化为积分上限函数的形式, 此时 $x \neq 0$, 但根据 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$, 知

$f(0) = 0$, 从而 $\varphi(0) = \int_0^1 f(0)dt = 0$, 由此, 利用积分上限函数的求导法则、导数在一点处的定义以及函数连续性的定义来判定 $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

【解析】由题设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ 知, $f(0) = 0$, $f'(0) = A$, 且有 $\varphi(0) = 0$. 又

$$\varphi(x) = \int_0^1 f(xt) dt \quad \underline{\underline{u = xt}} \quad \frac{\int_0^x f(u) du}{x} \quad (x \neq 0),$$

从而
$$\varphi'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2} \quad (x \neq 0).$$

由导数定义, 有

$$\varphi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{A}{2}.$$

由于
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} \\ &= A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} = \varphi'(0), \end{aligned}$$

从而知 $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

八、(本题满分 8 分)

【解析】设 $f(x) = x - \frac{\pi}{2} \sin x$, 研究 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内的极值情况, 从而判定它与水平线 $y = k$ 的交点个数. 由 $f'(x) = 1 - \frac{\pi}{2} \cos x = 0$ 解得 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内的唯一驻点 $x_0 = \arccos \frac{2}{\pi}$; 由 $\cos x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单调减, $f'(x)$ 在点 x_0 由负变正, x_0 是 $f(x)$ 的极小点也是最小点. 最小值 $f(x_0) = x_0 - \frac{\pi}{2} \sin x_0 \triangleq y_0$; 由此, 最大值 $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$ (显然 $y_0 < 0$).

当 $k \geq 0$ 或 $k < y_0$ 时, $y = f(x)$ 与 $y = k$ 没有交点; 当 $k = y_0$ 时, 两者有唯一交点; 当 $y_0 < k < 0$ 时, 两者有两个交点.

评注: 也可以设 $g(x) = x - \frac{\pi}{2} \sin x - k$, 研究它的零点个数.