

1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题解析

一、填空题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分. 把答案填在题中横线上.)

(1) 【答案】 $\frac{1}{e}$

【解析】 曲线 $y = x^n$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线斜率 $y'|_{x=1} = (x^n)' \Big|_{x=1} = nx^{n-1} \Big|_{x=1} = n$, 根据点斜

式, 切线方程为:

$$y - 1 = n(x - 1).$$

令 $y = 0$, 代入 $y - 1 = n(x - 1)$, 则 $x = 1 - \frac{1}{n}$, 即在 x 轴上的截距为 $\xi_n = 1 - \frac{1}{n}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{(-x)(-1)} = \frac{1}{e}.$$

(2) 【答案】 $-\frac{\ln x}{x} + C$

【解析】 由分部积分公式,

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx &= -\int (\ln x - 1) \left(\frac{1}{x}\right)' dx = -\int (\ln x - 1) d\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\stackrel{\text{分部}}{=} -\frac{\ln x - 1}{x} + \int \frac{1}{x} d(\ln x - 1) = -\frac{\ln x - 1}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx \\ &= -\frac{\ln x - 1}{x} - \int \left(\frac{1}{x}\right)' dx = -\frac{\ln x - 1}{x} - \frac{1}{x} + C = -\frac{\ln x}{x} + C. \end{aligned}$$

【相关知识点】 分部积分公式: 假定 $u = u(x)$ 与 $v = v(x)$ 均具有连续的导函数, 则

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx, \text{ 或者 } \int u dv = uv - \int v du.$$

(3) 【答案】 $y_t = C(-5)^t + \frac{5}{12}(t - \frac{1}{6})$

【解析】 首先把差分方程改写成标准形式 $y_{t+1} + 5y_t = \frac{5}{2}t$, 其齐次方程对应的特征方程及特征根分别为

$$r + 5 = 0, r = -5,$$

故齐次方程的通解为 $Y_t = C(-5)^t$, C 为常数.

将方程右边的 $\frac{5}{2}t$ 改写成 $\frac{5}{2}t \cdot 1^t$, 此处 “1” 不是特征根, 故令非齐次方程的一个特解为

$$y_t^* = At + B,$$

从而 $y_{t+1}^* = A(t+1) + B$, 代入原方程, 得

$$A(t+1) + B + 5(At + B) = \frac{5}{2}t,$$

$$6A = \frac{5}{2}, A + 6B = 0,$$

故 $A = \frac{5}{12}, B = -\frac{5}{72}.$

于是通解为 $y_t = Y_t + y_t^* = C(-5)^t + \frac{5}{12}(t - \frac{1}{6}).$

(4) 【答案】 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

【解析】由题设 $AA^*BA = 2BA - 8E,$

由于 $|A| = -2 \neq 0$, 所以 A 可逆. 上式两边左乘 A , 右乘 A^{-1} , 得

$$AA^*BAA^{-1} = 2ABAA^{-1} - 8AA^{-1}$$

$$|A|B = 2AB - 8E \quad (\text{利用公式: } AA^* = |A|E, AA^{-1} = E)$$

$$|A|B - 2AB = -8E \quad (\text{移项})$$

$$(|A|E - 2A)B = -8E \quad (\text{矩阵乘法的运算法则})$$

将 $|A| = -2$ 代入上式, 整理得 $\frac{1}{4}(E + A)B = E.$

由矩阵可逆的定义, 知 $E + A, B$ 均可逆, 且

$$B^{-1} = 4(E + A)^{-1} = 4 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = 4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(5) 【答案】 $\frac{1}{20}, \frac{1}{100}, 2$

【解析】由于 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立, 均服从 $N(0, 2^2)$, 所以由数学期望和方差的性质, 得

$$E(X_1 - 2X_2) = 0, D(X_1 - 2X_2) = 1 \times 2^2 + 2^2 \times 2^2 = 20,$$

所以 $(X_1 - 2X_2) \sim N(0, 20)$, 同理 $(3X_3 - 4X_4) \sim N(0, 100).$

又因为 $(X_1 - 2X_2)$ 与 $(3X_3 - 4X_4)$ 相互独立, 且

$$\frac{1}{\sqrt{20}}(X_1 - 2X_2) \sim N(0, 1); \quad \frac{1}{\sqrt{100}}(3X_3 - 4X_4) \sim N(0, 1),$$

由 χ^2 分布的定义, 当 $a = \frac{1}{20}, b = \frac{1}{100}$ 时,

$$X = \frac{1}{20}(X_1 - 2X_2)^2 + \frac{1}{100}(3X_3 - 4X_4)^2 \sim \chi^2(2).$$

即当 $a = \frac{1}{20}, b = \frac{1}{100}$ 时, X 服从 χ^2 分布, 其自由度为 2.

严格地说, 当 $a = 0, b = \frac{1}{100}$ 时, $X \sim \chi^2(1)$; 当 $a = \frac{1}{20}, b = 0$ 时, $X \sim \chi^2(1)$ 也是正确的.

【相关知识点】 1、对于随机变量 X 与 Y 均服从正态分布, 则 X 与 Y 的线性组合亦服从正态分布.

若 X 与 Y 相互独立, 由数学期望和方差的性质, 有

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c,$$

$$D(aX + bY + c) = a^2D(X) + b^2D(Y),$$

其中 a, b, c 为常数.

2、定理: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

3、 χ^2 分布的定义: 若 $Z_1, \dots, Z_n$ 相互独立, 且都服从标准正态分布 $N(0, 1)$, 则

$$\sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi^2(n).$$

二、选择题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) **【答案】** (D)

【解析】 根据导数定义: $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x) - f(1)}{-x} = \frac{1}{2} f'(1) = -1$$

所以 $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x) - f(1)}{-x} = -2$.

因为 $f(x)$ 周期为 4, $f'(x)$ 的周期亦是 4, 即 $f'(x) = f'(x+4)$,

所以 $f'(5) = f'(1+4) = f'(1) = -2$.

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(5, f(5))$ 处的切线的斜率为 $f'(5) = f'(1) = -2$. 选 (D).

(2) 【答案】(B)

【分析】讨论由极限表示的函数的性质, 应分两步走. 先求出该 $f(x)$ 的(分段)表达式, 然后再讨论 $f(x)$ 的性质. 不能隔着极限号去讨论.

【解析】现求 $f(x)$ 的(分段)表达式:

当 $|x| > 1$ 时,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{-2n} + x^{1-2n}}{x^{-2n} + 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (x^{-2n} + x^{1-2n})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (x^{-2n} + 1)} = \frac{0}{1} = 0;$$

当 $x = 1$ 时,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+1}{1+1^{2n}} = \frac{2}{2} = 1;$$

当 $x = -1$ 时,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-1}{1+(-1)^{2n}} = \frac{0}{2} = 0;$$

当 $|x| < 1$ 时,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x^{2n})} \stackrel{x^{2n} \rightarrow 0}{=} \frac{1+x}{1} = 1+x.$$

$$\text{由此, } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x < -1, \\ 0, & \text{当 } x = -1, \\ 1+x, & \text{当 } |x| < 1, \\ 1, & \text{当 } x = 1, \\ 0, & \text{当 } x > 1. \end{cases} \quad \text{即 } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \leq -1 \text{ 或 } x > 1, \\ 1+x, & \text{当 } |x| < 1, \\ 1, & \text{当 } x = 1. \end{cases}$$

再讨论函数 $f(x)$ 的性质: 在 $x = -1$ 处,

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (1+x) = 1-1 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = 0,$$

所以, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0$, 函数 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处连续, 不是间断点.

$$\text{在 } x = 1 \text{ 处, } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 0 = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1+x) = 2;$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, 函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不连续, 是第一类间断点. 故选(B).

(3) 【答案】(C)

【解析】方法 1: 由 $AB = 0$ 知 $r(A) + r(B) \leq 3$, 又 $A \neq 0, B \neq 0$, 于是 $1 \leq r(A) < 3$,

$1 \leq r(B) < 3$, 故 $|A| = 0, |B| = 0$, 即

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ \lambda-1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0,$$

得 $\lambda = 1$. 应选 (C).

方法 2: 由 $AB = 0$ 知 $r(A) + r(B) \leq 3$, 又 $A \neq 0, B \neq 0$, 于是 $1 \leq r(A) < 3, 1 \leq r(B) < 3$, 故

$$|B| = 0.$$

$$\text{显然, } \lambda = 1 \text{ 时 } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 有 } 1 \leq r(A) < 3, \text{ 故应选 (C).}$$

作为选择题, 只需在 $\lambda = -2$ 与 $\lambda = 1$ 中选择一个, 因而可以用特殊值代入法.

评注: 对于条件 $AB = 0$ 应当有两个思路: 一是 B 的列向量是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解; 二是秩的信息, 即 $r(A) + r(B) \leq n$, 要有这两种思考问题的意识.

(4) 【答案】(B)

【解析】

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a-1 & 1-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-1 & 0 & 1-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-1 & 0 & 0 & \cdots & 1-a \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & 1-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a \end{bmatrix}$$

其中 (1) 变换: 将 1 行乘以 (-1) 再分别加到其余各行; (2) 变换: 将其余各列分别加到第 1 列.

由阶梯形矩阵知, 当 $1+(n-1)a = 0$, 即 $a = \frac{1}{1-n}$ 时, 有 $r(A) = n-1$, 故应选 (B).

(5) 【答案】(A)

【解析】根据分布函数的性质 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, 即

$$1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(+\infty) = aF_1(+\infty) - bF_2(+\infty) = a - b.$$

在所给的四个选项中只有 (A) 满足 $a - b = 1$, 故应选 (A).

【相关知识点】分布函数 $F(x)$ 的性质:

- (1) $F(x)$ 单调不减;
- (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1;$
- (3) $F(x)$ 是右连续的.

三、(本题满分 5 分)

【解析】
$$\begin{aligned} dz &= e^{-\arctan \frac{y}{x}} d(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2) d(e^{-\arctan \frac{y}{x}}) \\ &= e^{-\arctan \frac{y}{x}} \left[2xdx + 2ydy + (x^2 + y^2) d\left(-\arctan \frac{y}{x}\right) \right] \\ &= e^{-\arctan \frac{y}{x}} \left[2xdx + 2ydy - (x^2 + y^2) \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} d\left(\frac{y}{x}\right) \right] \\ &= e^{-\arctan \frac{y}{x}} \left[2xdx + 2ydy - x^2 \cdot \frac{xdy - ydx}{x^2} \right] \\ &= e^{-\arctan \frac{y}{x}} [(2x + y)dx + (2y - x)dy] \end{aligned}$$

由全微分与偏微分的关系可知, 其中 dx 的系数就是 $\frac{\partial z}{\partial x}$, 即 $\frac{\partial z}{\partial x} = (2x + y)e^{-\arctan \frac{y}{x}}$. 再对 y 求偏导数, 得

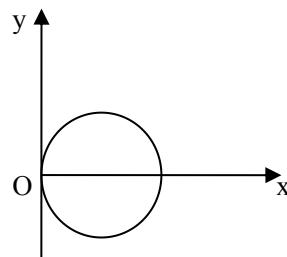
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{-\arctan \frac{y}{x}} - (2x + y)e^{-\arctan \frac{y}{x}} \left(\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \right) \frac{1}{x} = \frac{y^2 - xy - x^2}{x^2 + y^2} e^{-\arctan \frac{y}{x}}.$$

四、(本题满分 5 分)

【解析】 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq x\}$ 表示圆心为 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, 半径为

$\frac{1}{2}$ 的圆及其内部, 画出区域 D , 如右图.

方法 1: $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{x-x^2} \leq y \leq \sqrt{x-x^2}\}$



所以,
$$\iint_D \sqrt{x} dx dy = \int_0^1 \sqrt{x} dx \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} dy = \int_0^1 2\sqrt{x} \sqrt{x-x^2} dx = 2 \int_0^1 x \sqrt{1-x} dx,$$

令 $\sqrt{1-x} = t$, 则 $x = 1-t^2$, $dx = -2tdt$, $t: 1 \rightarrow 0$ 所以

$$\text{上式} = 2 \int_1^0 (1-t^2)t \cdot (-2t) dt = 4 \int_0^1 t^2(1-t^2) dt = 4 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right)_0^1 = \frac{8}{15}.$$

方法 2: 引入极坐标系 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 于是

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \cos \theta \right\},$$

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x} dx dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos \theta} \sqrt{r \cos \theta} r dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \theta} d\theta \int_0^{\cos \theta} r^{\frac{3}{2}} dr \\ &= \frac{4}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

其中倒数第二步用了华里士公式:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1, \text{ 其中 } n \text{ 为大于 } 1 \text{ 的正奇数.}$$

五、(本题满分 6 分)

【分析】根据连续复利公式, 在年利率为 r 的情况下, 现时的 A (元) 在 t 时的总收入为 $R(t) = Ae^{rt}$, 反之, t 时总收入为 $R(t)$ 的现值为 $A(t) = R(t)e^{-rt}$, 将 $R = R_0 e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}}$ 代入即得到总收入的现值与窖藏时间 t 之间的关系式, 从而可用微分法求其最大值.

【解析】由连续复利公式知, 这批酒在窖藏 t 年末售出总收入 R 的现值为 $A(t) = Re^{-rt}$, 而由题设, t 年末的总收入 $R = R_0 e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}}$, 据此可列出 $A(t)$:

$$A(t) = Re^{-rt} = R_0 e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt},$$

$$\text{令 } \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} \left(R_0 e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt} \right) = R_0 e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt} \left(\frac{1}{5\sqrt{t}} - r \right) = 0,$$

$$\text{得惟一驻点 } t = t_0 = \frac{1}{25r^2}.$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dA}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(R_0 e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt} \left(\frac{1}{5\sqrt{t}} - r \right) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(R_0 e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt} \right) \cdot \left(\frac{1}{5\sqrt{t}} - r \right) + R_0 e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{5\sqrt{t}} - r \right) \\ &= R_0 e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt} \left(\frac{1}{5\sqrt{t}} - r \right)^2 + R_0 e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt} \left(-\frac{1}{10\sqrt{t}^3} \right) \\ &= R_0 e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt} \left[\left(\frac{1}{5\sqrt{t}} - r \right)^2 - \frac{1}{10\sqrt{t}^3} \right] \end{aligned}$$

$$\left. \frac{d^2 A}{dt^2} \right|_{t=t_0} = R_0 e^{\frac{1}{25r}} (-12.5r^3) < 0.$$

根据极值的第二充分条件, 知: $t = t_0$ 是 $A(t)$ 的极大值点, 又因驻点惟一, 所以也是最大值点. 故窖藏 $t = \frac{1}{25r^2}$ 年出售, 总收入的现值最大.

$$\text{当 } r = 0.06 \text{ 时, } t = \frac{1}{25 \cdot (0.06)^2} = \frac{100}{9} \approx 11 \text{ (年)}.$$

【相关知识点】 极值的第二充分条件: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数且 $f'(x_0) = 0$,

$f''(x_0) \neq 0$, 当 $f''(x_0) < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值; 当 $f''(x_0) > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

六、(本题满分 6 分)

【分析】 本题要证的结论中出现两个中值点 ξ 和 η , 这种问题一般应将含有 ξ 和 η 的项分别移到等式两边后再用微分中值定理, 为此本题只要证

$$f'(\xi)(b-a) = (e^b - e^a)f'(\eta)e^{-\eta}.$$

【解析】方法 1: 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 满足拉格朗日中值定理的条件,

对函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上用拉格朗日中值定理, 有

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a), a < \xi < b.$$

又函数 $f(x)$ 与 e^x 满足柯西中值定理的条件, 将函数 $f(x)$ 与 e^x 在 $[a, b]$ 上用柯西中值定理, 有

$$\frac{f(b) - f(a)}{e^b - e^a} = \frac{f'(\eta)}{e^\eta}, a < \eta < b, \text{ 即 } f(b) - f(a) = (e^b - e^a) \frac{f'(\eta)}{e^\eta}.$$

从而有

$$f'(\xi)(b-a) = (e^b - e^a) \frac{f'(\eta)}{e^\eta}, \text{ 即 } \frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b-a} \cdot e^{-\eta}, \xi, \eta \in (a, b).$$

方法 2: 题中没有限制 $\xi \neq \eta$, 因此取 $\xi = \eta$, 即成为要去证存在 $\eta \in (a, b)$ 使 $\frac{e^b - e^a}{b-a} = e^\eta$.

在 $[a, b]$ 上对函数 e^x 用拉格朗日中值定理, 存在 $\eta \in (a, b)$ 使

$$\frac{e^b - e^a}{b-a} = e^\eta, \text{ 即 } \frac{e^b - e^a}{b-a} \cdot e^{-\eta} = 1.$$

再取 $\xi = \eta$, 则 $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = 1 = \frac{e^b - e^a}{b-a} \cdot e^{-\eta}$, 原题得证.

【相关知识点】1. 拉格朗日中值定理:

如果函数 $f(x)$ 满足在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 那么在 (a, b) 内至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使等式 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ 成立.

2. 柯西中值定理: 如果函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a, b) 内可导;

(3) 对任一 $x \in (a, b)$, $F'(x) \neq 0$,

那么在 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使等式 $\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$ 成立.

七、(本题满分 6 分)

【解析】 (1) 由 $y = nx^2 + \frac{1}{n}$ 与 $y = (n+1)x^2 + \frac{1}{n+1}$ 得 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

因图形关于 y 轴对称, 所以, 所求图形的面积为

$$\begin{aligned} S_n &= 2 \int_0^{a_n} \left[nx^2 + \frac{1}{n} - (n+1)x^2 - \frac{1}{n+1} \right] dx \\ &= 2 \int_0^{a_n} \left[-x^2 + \frac{1}{n(n+1)} \right] dx = \frac{2a_n}{n(n+1)} - 2 \frac{a_n^3}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{n(n+1)\sqrt{n(n+1)}}. \end{aligned}$$

(2) 由 (1) 的结果知

$$\frac{S_n}{a_n} = \frac{4}{3} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

根据级数和的定义,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{a_k} = \frac{4}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{4}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{n+1} \right] = \frac{4}{3}.$$

八、(本题满分 7 分)

【分析】 本题是微分方程的几何应用问题. 在题目中给出了由曲线 $y = f(x)$ 等围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体体积 $V(t)$ 与包含函数 f 的一个恒等式, 这正是列方程的依据.

【解析】 由绕 x 轴旋转的旋转体体积公式得 $V(t) = \pi \int_1^t f^2(x) dx$, 于是, 依题意得

$$\pi \int_1^t f^2(x) dx = \frac{\pi}{3} [t^2 f(t) - f(1)], \text{ 即 } 3 \int_1^t f^2(x) dx = t^2 f(t) - f(1).$$

两边对 t 求导, 化成微分方程

$$3f^2(t) = 2tf(t) + t^2 f'(t),$$

其中 $f(t)$ 为未知函数. 按通常以 x 表示自变量, y 表示未知函数 $f(t)$, 于是上述方程可写为

$$x^2 y' = 3y^2 - 2xy,$$

即
$$\frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{x}\right).$$

这是一阶齐次微分方程. 令 $y = ux$, 有 $\frac{dy}{dx} = u + x \cdot \frac{du}{dx}$, 则上式化为

$$u + x\left(\frac{du}{dx}\right) = 3u^2 - 2u,$$

即
$$x \frac{du}{dx} = 3u(u-1). \quad (*)$$

若 $u = 0$, 则 $y = ux = 0$, 不满足初始条件 $y|_{x=2} = \frac{2}{9}$, 舍弃;

若 $u = 1$, 则 $y = ux = x$, 也不满足初始条件 $y|_{x=2} = \frac{2}{9}$, 舍弃;

所以, $u \neq 0$, 且 $u \neq 1$.

由 (*) 式分离变量得 $\frac{du}{u(u-1)} = \frac{3dx}{x}$, 两边积分得 $\frac{u-1}{u} = Cx^3$. 从而方程 (*) 的通解为

$$y - x = Cx^3 y, C \text{ 为任意常数.}$$

再代入初值, 由 $y|_{x=2} = \frac{2}{9}$, 得 $C = -1$, 从而所求的解为

$$y - x = -x^3 y, \text{ 或 } y = \frac{x}{1+x^3}, (x \geq 1).$$

【相关知识点】 1. 对积分上限的函数的求导公式: 若 $F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x) dx$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 均一阶可导, 则 $F'(t) = \beta'(t) \cdot f[\beta(t)] - \alpha'(t) \cdot f[\alpha(t)]$.

九、(本题满分 9 分)

【解析】 (1) 对等式 $\alpha^T \beta = 0$ 两边取转置, 有 $(\alpha^T \beta)^T = \beta^T \alpha = 0$, 即 $\beta^T \alpha = 0$.

利用 $\beta^T \alpha = 0$ 及矩阵乘法的运算法则, 有

$$A^2 = (\alpha \beta^T)^2 = \alpha \beta^T \alpha \beta^T = \alpha (\beta^T \alpha) \beta^T = \alpha 0 \beta^T = 0 \alpha \beta^T = 0,$$

即 A^2 是 n 阶零矩阵.

(2) 设 λ 是 A 的任一特征值, $\xi (\xi \neq 0)$ 是 A 属于特征值 λ 的特征向量, 即 $A\xi = \lambda\xi$.

对上式两边左乘 A 得 $A^2\xi = A\lambda\xi = \lambda(A\xi) = \lambda(\lambda\xi) = \lambda^2\xi$, 由 (1) 的结果 $A^2 = 0$, 得

$\lambda^2\xi = A^2\xi = 0$, 因 $\xi \neq 0$, 故 $\lambda = 0$ (n 重根), 即矩阵的全部特征值为零.

下面求 A 的特征向量: 先将 A 写成矩阵形式

$$A = \alpha\beta^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [b_1, b_2, \dots, b_n] = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}.$$

不妨设 $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$, 则有

$$(0E - A) = \begin{bmatrix} -a_1b_1 & -a_1b_2 & \cdots & -a_1b_n \\ -a_2b_1 & -a_2b_2 & \cdots & -a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_nb_1 & -a_nb_2 & \cdots & -a_nb_n \end{bmatrix} \xrightarrow{1\text{行} \div (-a_1)} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ -a_2b_1 & -a_2b_2 & \cdots & -a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_nb_1 & -a_nb_2 & \cdots & -a_nb_n \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{1\text{行} \times a_i \text{ 加到 } i \text{ 行 } (i=2, \dots, n)} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

于是得方程组 $(0E - A)x = 0$ 同解方程组 $b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0$, 这样基础解系所含向量

个数为 $n - r(0E - A) = n - 1$.

选 $x_2, \dots, x_n$ 为自由未知量, 将它们的组值 $(b_1, 0, \dots, 0), (0, b_1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, b_1)$ 代入, 可解得基础解系为

$$\xi_1 = (-b_2, b_1, 0, \dots, 0), \xi_2 = (-b_3, 0, b_1, \dots, 0), \dots, \xi_{n-1} = (-b_n, 0, 0, \dots, b_1)$$

则 A 的属于 $\lambda = 0$ 的全部特征向量为 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-1}\xi_{n-1}$, 其中 $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ 为不全为零的任意常数.

十、(本题满分 7 分)

【分析】由于 B 是实对称矩阵, B 必可相似对角化, 而对角矩阵 Λ 即 B 的特征值, 只要求出 B 的特征值即知 Λ , 又因正定的充分必要条件是特征值全大于零, k 的取值亦可求出.

【解析】方法 1: 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)^2,$$

可得 A 的特征值是 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$.

那么, $kE + A$ 的特征值是 $k+2, k+2, k$, 而 $B = (kE + A)^2$ 的特征值是 $(k+2)^2, (k+2)^2, k^2$.

又由题设知 A 是实对称矩阵, 则 $A^T = A$, 故

$$B^T = [(kE + A)^2]^T = [(kE + A)^T]^2 = (kE + A)^2 = B,$$

即 B 也是实对称矩阵, 故 B 必可相似对角化, 且

$$B \quad \Lambda = \begin{bmatrix} (k+2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (k+2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{bmatrix}.$$

当 $k \neq -2$ 且 $k \neq 0$ 时, B 的全部特征值大于零, 这时 B 为正定矩阵.

方法 2: 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)^2,$$

可得 A 的特征值是 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$.

因为 A 是实对称矩阵, 故存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$, 即 $A = P\Lambda P^{-1}$.

$$\begin{aligned} \text{那么} \quad B &= (kE + A)^2 = (kPP^{-1} + P\Lambda P^{-1})^2 = [P(kE + \Lambda)P^{-1}]^2 \\ &= P(kE + \Lambda)P^{-1}P(kE + \Lambda)P^{-1} = P(kE + \Lambda)^2 P^{-1}. \end{aligned}$$

$$\text{即 } P^{-1}BP = (kE + \Lambda)^2. \text{ 故 } B \quad \Lambda = \begin{bmatrix} (k+2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (k+2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{bmatrix}.$$

当 $k \neq -2$ 且 $k \neq 0$ 时, B 的全部特征值大于零, 这时 B 为正定矩阵.

【相关知识点】 1. 特征值的性质: 若 A 有特征值 λ , 则 A 的特征多项式 $f(A)$ 有特征值

$f(\lambda)$.

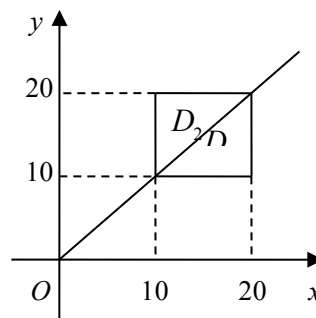
2. 矩阵正定的充要条件是特征值全大于零.

十一、(本题满分 10 分)

【解析】设 Z 表示商店每周所得的利润,
当 $Y \leq X$ 时, 卖得利润为 $Z = 1000Y$ (元);
当 $Y > X$ 时, 调剂了 $Y - X$, 总共得到利润

$$Z = 1000X + 500(Y - X) = 500(X + Y) \text{ (元)}.$$

$$\text{所以, } Z = \begin{cases} 1000Y, & Y \leq X, \\ 500(X + Y), & Y > X. \end{cases}$$



由题设 X 与 Y 都服从区间 $[10, 20]$ 上的均匀分布, 联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{100}, & 10 \leq x \leq 20, 10 \leq y \leq 20, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

由二维连续型随机变量的数学期望定义得

$$\begin{aligned} E(Z) &= \iint_{D_1} 1000y \cdot f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} 500(x + y) \cdot f(x, y) dx dy \\ &= \iint_{D_1} 1000y \cdot \frac{1}{100} dx dy + \iint_{D_2} 500(x + y) \cdot \frac{1}{100} dx dy \\ &= 10 \int_{10}^{20} dy \int_y^{20} y dx + 5 \int_{10}^{20} dy \int_{10}^y (x + y) dx \\ &= 10 \int_{10}^{20} y(20 - y) dy + 5 \int_{10}^{20} \left(\frac{3}{2} y^2 - 10y - 50 \right) dy \\ &= \frac{20000}{3} + 5 \times 1500 \approx 14166.67 \text{ (元)}. \end{aligned}$$

十二、(本题满分 9 分)

【解析】记事件 $B_j =$ “第 j 次抽到的报名表是女生表” ($j = 1, 2$), $A_i =$ “报名表是第 i 个地区的” ($i = 1, 2, 3$). 易见, A_1, A_2, A_3 构成一个完备事件组, 且

$$\begin{aligned} P\{A_i\} &= \frac{1}{3} (i = 1, 2, 3), \\ P\{B_1 | A_1\} &= \frac{3}{10}, P\{B_1 | A_2\} = \frac{7}{15}, P\{B_1 | A_3\} = \frac{5}{25}. \end{aligned}$$

(1) 应用全概率公式, 知

$$p = P\{B_1\} = \sum_{i=1}^3 P\{A_i\} \cdot P\{B_1 | A_i\} = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{10} + \frac{7}{15} + \frac{5}{25} \right) = \frac{29}{90}.$$

(2) $q = P\{B_1 | \overline{B_2}\}$. 需先计算概率 $P\{B_1 \overline{B_2}\}$ 与 $P\{\overline{B_2}\}$. 对事件 $B_1 \overline{B_2}$ 再次用全概率公式:

$$P\{B_1 \overline{B_2}\} = \sum_{i=1}^3 P\{A_i\} \cdot P\{B_1 \overline{B_2} | A_i\} = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} + \frac{7}{15} \cdot \frac{8}{14} + \frac{5}{25} \cdot \frac{20}{24} \right) = \frac{20}{90},$$

由“抽签原理”可知 $P(\overline{B_2}) = P(\overline{B_1}) = \frac{61}{90}$,

$$q = P\{B_1 | \overline{B_2}\} = \frac{P(B_1 \overline{B_2})}{P(\overline{B_2})} = \frac{20}{90} \cdot \frac{90}{61} = \frac{20}{61}.$$

【相关知识点】1. 全概率公式：如果事件 $A_1, \dots, A_n$ 构成一个完备事件组, 即它们是两两互不

相容, 其和为 Ω (总体的样本空间); 并且 $P(A_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$, 则对任一事件 B 有

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i).$$