

1999年全国硕士研究生入学统一考试数一试题解析

一、填空题(本题共5个小题,每小题3分,满分15分.把正确答案填写在题中横线上.)

(1) 【答案】 $\frac{1}{3}$.

【分析】 利用 $x \rightarrow 0$ 的等价变换和洛必达法则求函数极限.

【详解】

$$\text{方法1: } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x} \stackrel{\tan x \sim x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$$
$$\stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{3x^2} \stackrel{\tan x \sim x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{方法2: } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{x \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x}$$
$$\stackrel{\sin x \sim x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}$$

(2) 【答案】 $\sin x^2$

【分析】 欲求 $\frac{d}{dx} \int_a^b \varphi(x, t) dt$, 唯一的办法是作变换, 使含有 $\varphi(x, t)$ 中的 x “转移”到 φ 之外

【详解】 令 $u = x - t$, 则 $dt = -du$, 所以有

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \sin(x-t)^2 dt = \frac{d}{dx} \int_x^0 (-\sin u^2) du = \frac{d}{dx} \int_0^x \sin u^2 du = \sin x^2$$

(3) 【答案】 $y = C_1 e^{-2x} + \left(C_2 + \frac{1}{4}x \right) e^{2x}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

【分析】 先求出对应齐次方程的通解, 再求出原方程的一个特解.

【详解】 原方程对应齐次方程 $y'' - 4y = 0$ 的特征方程为: $\lambda^2 - 4 = 0$, 解得 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$, 故 $y'' - 4y = 0$ 的通解为 $y_1 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$,

由于非齐次项为 $f(x) = e^{2x}$, 因此原方程的特解可设为 $y^* = A x e^{2x}$, 代入原方程可求得

$$A = \frac{1}{4}, \text{ 故所求通解为 } y = y_1 + y^* = C_1 e^{-2x} + \left(C_2 + \frac{1}{4}x \right) e^{2x}$$

(4) 【详解】 因为

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & \lambda-1 \end{pmatrix} \quad (\text{对应元素相减})$$

两边取行列式，

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & \lambda-1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{加到第1列}]{\text{把第2, \dots, n列}} \begin{vmatrix} \lambda-n & -1 & \dots & -1 \\ \lambda-n & \lambda-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda-n & -1 & \dots & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow[\text{提取第1列}]{\text{的公因子 } (\lambda-n)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & \lambda-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -1 & \dots & \lambda-1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{n行-1行}]{\begin{matrix} 2\text{行}-1\text{行} \\ 3\text{行}-1\text{行} \\ \dots \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^{n-1}(\lambda-n) \end{aligned}$$

令 $|\lambda E - A| = \lambda^{n-1}(\lambda-n) = 0$ ，得 $\lambda_1 = n$ (1重)， $\lambda_2 = 0$ (($n-1$)重)，故矩阵 A 的 n 个特征值是 n 和 0 (($n-1$)重)

(5) 【答案】 $1/4$

【详解】 根据加法公式有

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AC) - P(AB) - P(BC) + P(ABC)$$

因为 $P(A) = P(B) = P(C)$ ，设 $P(A) = P(B) = P(C) = p$

由于 A, B, C 两两相互独立，所以有

$$P(AB) = P(A)P(B) = p \times p = p^2,$$

$$P(AC) = P(A)P(C) = p \times p = p^2,$$

$$P(BC) = P(B)P(C) = p \times p = p^2,$$

又由于 $ABC = \emptyset$ ，因此有 $P(ABC) = P(\emptyset) = 0$ ，

所以 $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AC) - P(AB) - P(BC) + P(ABC)$

$$= p + p + p - p^2 - p^2 - p^2 + 0 = 3p - 3p^2$$

又 $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$ ，从而 $P(A \cup B \cup C) = 3p - 3p^2 = \frac{9}{16}$ ，则有 $3p - 3p^2 - \frac{9}{16} = 0$

$$\Rightarrow p^2 - p + \frac{3}{16} = 0, \text{ 解得 } p = \frac{3}{4} \text{ 或 } p = \frac{1}{4}$$

因 $P(A) = P(B) = P(C) = p < \frac{1}{2}$, 故 $p = \frac{1}{4}$, 即 $P(A) = \frac{1}{4}$

二、选择题

(1) 【答案】(A)

【详解】应用函数定义判定函数的奇偶性、周期性和单调性.

$f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 可以表示为 $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$, 于是

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt + C \stackrel{u=-t}{=} \int_0^x f(-u)d(-u) + C.$$

当 $f(x)$ 为奇函数时, $f(-u) = -f(u)$, 从而有

$$F(-x) = \int_0^x f(u)du + C = \int_0^x f(t)dt + C = F(x)$$

即 $F(x)$ 为偶函数. 故(A)为正确选项.

(B)、(C)、(D)可分别举反例如下:

$f(x) = x^2$ 是偶函数, 但其原函数 $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$ 不是奇函数, 可排除(B);

$f(x) = \cos^2 x$ 是周期函数, 但其原函数 $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$ 不是周期函数, 可排除(C);

$f(x) = x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增函数, 但其原函数 $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内非单调增函数, 可排除(D).

(2) 【答案】(D)

【详解】由于可导必连续, 连续则极限必存在, 可以从函数可导性入手.

因为
$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} xg(x) = 0,$$

从而, $f'(0)$ 存在, 且 $f'(0) = 0$, 故正确选项为(D).

(3) 【答案】(C)

【详解】由题设知, 应先将 $f(x)$ 从 $[0, 1]$ 作偶延拓, 使之成为区间 $[-1, 1]$ 上的偶函数, 然后再作周期(周期2)延拓, 进一步展开为傅里叶级数,

$$S\left(-\frac{5}{2}\right) = S\left(-2 - \frac{1}{2}\right) = S\left(-\frac{1}{2}\right) = S\left(\frac{1}{2}\right)$$

而 $x = \frac{1}{2}$ 是 $f(x)$ 的间断点, 按狄利克雷定理有,

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{1}{2}-0\right) + f\left(\frac{1}{2}+0\right)}{2} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{2} = \frac{3}{4}.$$

(4) 【答案】B

【详解】

方法1: A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则 AB 是 m 阶方阵, 因

$$r(AB) \leq \min[r(A), r(B)] \leq \min(m, n).$$

当 $m > n$ 时, 有 $r(AB) \leq \min[r(A), r(B)] \leq n < m$. ($(AB)x = 0$ 的系数矩阵的秩小于未知数的个数), 故有行列式 $|AB| = 0$, 故应选(B).

方法2: B 是 $n \times m$ 矩阵, 当 $m > n$ 时, 则 $r(B) = n$ (系数矩阵的秩小于未知数的个数), 方程组 $Bx = 0$ 必有非零解, 即存在 $x_0 \neq 0$, 使得 $Bx_0 = 0$, 两边左乘 A , 得 $ABx_0 = 0$, 即 $ABx = 0$ 有非零解, 从而 $|AB| = 0$, 故选(B).

方法3: 用排除法

$$(A) m > n, \text{ 取 } A_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B_{n \times m} = (0 \ 0), \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |AB| = 0, \text{ (A) 不成立}$$

$$(C) n > m, \text{ 取 } A_{m \times n} = (1 \ 0), B_{n \times m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad AB = 0, \quad |AB| = 0, \text{ (C) 不成立}$$

$$(D) n > m, \text{ 取 } A_{m \times n} = (1 \ 0), B_{n \times m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad AB = 1, \quad |AB| = 1, \text{ (D) 不成立, 故选(B).}$$

(5) 【答案】B

【详解】 根据正态分布的性质: 服从正态分布的独立随机变量的线性组合仍服从正态分布.

因 X 和 Y 相互独立, 且 $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(1, 1)$, 所以

$$T_1 = X + Y \sim N(u_1, \sigma_1^2), \quad T_2 = X - Y \sim N(u_2, \sigma_2^2)$$

其中 $u_1 = E(X + Y)$, $\sigma_1^2 = D(X + Y)$, $u_2 = E(X - Y)$, $\sigma_2^2 = D(X - Y)$

由期望的性质: $E(T_1) = E(X + Y) = EX + EY = 0 + 1 = 1$,

$$E(T_2) = E(X - Y) = EX - EY = 0 - 1 = -1$$

由独立随机变量方差的性质: $D(T_1) = D(X + Y) = DX + DY = 1 + 1 = 2$

$$D(T_2) = D(X - Y) = DX + DY = 1 + 1 = 2$$

所以 $T_1 = X + Y \sim N(1, 2)$, $T_2 = X - Y \sim N(-1, 2)$

(一般来说遇到正态分布的小题, 主要就考两点, 标准化和对称性, 考虑问题也是从这两点出发)

A选项: $P\{X + Y \leq 0\} = \frac{1}{2}$. 因 $T_1 = X + Y \sim N(1, 2)$

由标准化的定义: 若 $X \sim N(u, \sigma^2)$, 则 $\frac{X-u}{\sigma} \sim N(0, 1)$

所以, $\frac{X+Y-1}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1)$, 将其标准化有

$$P\{X + Y \leq 0\} = P\left\{\frac{X+Y-1}{\sqrt{2}} \leq \frac{0-1}{\sqrt{2}}\right\} = P\left\{\frac{X+Y-1}{\sqrt{2}} \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

(保证变换过程中概率不变, 所以不等号的左边怎么变, 右边也同样的变化)

又因为标准正态分布图像是关于 y 轴对称, 所以

$$P\left\{\frac{X+Y-1}{\sqrt{2}} \leq 0\right\} = \frac{1}{2}, \text{ 而 } P\left\{\frac{X+Y-1}{\sqrt{2}} \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\} < \frac{1}{2}, \text{ 所以A错.}$$

B选项: $P\{X + Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$.

将其标准化有: $P\left\{\frac{X+Y-1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1-1}{\sqrt{2}}\right\} = P\left\{\frac{X+Y-1}{\sqrt{2}} \leq 0\right\} = \frac{1}{2}$ (根据标准正态分布的对称性)

故B正确.

C选项: $P\{X - Y \leq 0\} = \frac{1}{2}$.

将其标准化有: $P\left\{\frac{X-Y-(-1)}{\sqrt{2}} \leq \frac{0-(-1)}{\sqrt{2}}\right\} = P\left\{\frac{X-Y+1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} > \frac{1}{2}$, 故C错.

D选项: $P\{X - Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$.

将其标准化有: $P\left\{\frac{X-Y-(-1)}{\sqrt{2}} \leq \frac{1-(-1)}{\sqrt{2}}\right\} = P\left\{\frac{X-Y+1}{\sqrt{2}} \leq \frac{2}{\sqrt{2}}\right\} > \frac{1}{2}$, 故D错.

三【详解】分别在 $z = xf(x, y)$ 和 $F(x, y, z) = 0$ 的两端对 x 求导数, 得

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = f(x, y) + x\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)f'(x, y) \\ F'_x + F'_y \frac{dy}{dx} + F'_z \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$$

$$\text{整理后得} \quad \begin{cases} -xf'(x, y) \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = f(x, y) + xf'(x, y) \\ F'_y \frac{dy}{dx} + F'_z \frac{dz}{dx} = -F'_x \end{cases}$$

解此方程组，得

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} -xf' & f + xf' \\ F'_y & -F'_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -xf' & 1 \\ F'_y & F'_z \end{vmatrix}} = \frac{(f + xf')F'_y - xfF'_z}{F'_y + xfF'_z}, (F'_y + xfF'_z \neq 0)$$

四【详解】

方法1: 凑成闭合曲线，应用格林公式.

添加从点 $O(0,0)$ 沿 $y=0$ 到点 $A(2a,0)$ 的有向直

线段 L_1 ，如图，则

$$\begin{aligned} I &= \int_{L+L_1} (e^x \sin y - b(x+y))dx + (e^x \cos y - ax)dy \\ &\quad - \int_{L_1} (e^x \sin y - b(x+y))dx + (e^x \cos y - ax)dy \end{aligned}$$

利用格林公式，前一积分

$$I_1 = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D (b-a) dxdy = \frac{\pi}{2} a^2 (b-a)$$

其中 D 为 L_1+L 所围成的半圆域，后一积分选择 x 为参数，得 L_1 ：

$$\begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases}, (0 \leq x \leq 2a),$$

$$\text{可直接积分} \quad I_2 = \int_0^{2a} (-bx)dx = -2a^2b, \quad \text{故} \quad I = I_1 - I_2 = \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right) a^2 b - \frac{\pi}{2} a^3.$$

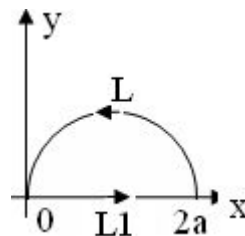
方法2: 将曲线积分分成两部分，其中一部分与路径无关，余下的积分利用曲线的参数方程计算.

$$\begin{aligned} I &= \int_L (e^x \sin y - b(x+y))dx + (e^x \cos y - ax)dy \\ &= \int_L e^x \sin y dx + e^x \cos y dy - \int_L b(x+y)dx + ax dy \end{aligned}$$

前一积分与路径无关，所以

$$\int_L e^x \sin y dx + e^x \cos y dy = e^x \sin y \Big|_{(2a,0)}^{(0,0)} = 0$$

对后一积分，取 L 的参数方程



$$\begin{cases} x = a + a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}, \text{ 则 } \begin{cases} dx = -a \sin t dt \\ dy = a \cos t dt \end{cases}, t \text{ 从 } 0 \text{ 到 } \pi, \text{ 得}$$

$$\int_L b(x+y)dx + axdy$$

$$= \int_0^\pi (-a^2 b \sin t - a^2 b \sin t \cos t - a^2 b \sin^2 t + a^3 \cos t + a^3 \cos^2 t) dt$$

$$= -2a^2 b - \frac{1}{2} \pi a^2 b + \frac{1}{2} \pi a^3$$

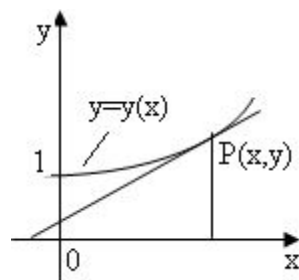
$$\text{从而 } I = 0 - (-2a^2 b - \frac{1}{2} \pi a^2 b + \frac{1}{2} \pi a^3) = \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right) a^2 b - \frac{\pi}{2} a^3$$

五【详解】如图，曲线 $y = y(x)$ 上点 $P(x, y)$ 处的切线方程为 $Y - y(x) = y'(x)(X - x)$

所以切线与 x 轴的交点为 $\left(x - \frac{y}{y'}, 0 \right)$

由于 $y'(x) > 0, y(0) = 1$, 因此 $y(x) > 0 (x > 0)$

$$\text{于是 } S_1 = \frac{1}{2} y \left| x - \left(x - \frac{y}{y'} \right) \right| = \frac{y^2}{2y'}$$



$$\text{又 } S_2 = \int_0^x y(t) dt,$$

$$\text{根据题设 } 2S_1 - S_2 = 1, \text{ 即 } 2 \cdot \frac{y^2}{2y'} - \int_0^x y(t) dt = 1, \text{ 两边对 } x \text{ 求导并化简得 } yy'' = (y')^2$$

这是可降阶得二阶常微分方程，令 $p = y'$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$,

则上述方程可化为 $yp \frac{dp}{dy} = p^2$, 分离变量得 $\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$, 解得 $p = C_1 y$, 即 $\frac{dy}{dx} = C_1 y$,

从而有 $y = C_1 e^x + C_2$, 根据 $y(0) = 1, y'(0) = 1$, 可得 $C_1 = 1, C_2 = 0$,

故所求曲线得方程为 $y = e^x$

六【详解】构造函数，利用函数的单调性，

证法1: 令 $f(x) = (x^2 - 1) \ln x - (x - 1)^2$. 易知 $f(1) = 0$

$$\text{又 } f'(x) = 2x \ln x - x + 2 - \frac{1}{x}, f'(1) = 0$$

$$f''(x) = 2 \ln x + 1 + \frac{1}{x^2}, f''(1) = 2 > 0$$

$$f'''(x) = \frac{2(x^2-1)}{x^3}$$

可见, 当 $0 < x < 1$ 时, $\begin{cases} f'''(x) < 0 \\ f''(x) \searrow \end{cases}$; 当 $1 < x < +\infty$ 时, $\begin{cases} f'''(x) > 0 \\ f''(x) \nearrow \end{cases}$

因此, $f''(1) = 2$ 为 $f''(x)$ 的最小值, 即当 $0 < x < +\infty$ 时, $f''(x) \geq f''(1) = 2 > 0$, 所以 $f'(x)$ 为单调增函数. 又因为 $f'(1) = 0$, 所以有

$$0 < x < 1 \text{ 时 } f'(x) < 0; \quad 1 < x < +\infty \text{ 时 } f'(x) > 0,$$

所以利用函数单调性可知, $f(1)$ 为 $f(x)$ 的最小值, 即 $f(x) \geq f(1) = 0$

所以有 $x > 0$ 时, $(x^2 - 1) \ln x \geq (x - 1)^2$.

证法2: 先对要证的不等式作适当变形, 当 $x = 1$ 时, 原不等式显然成立;

当 $0 < x < 1$ 时, 原不等式等价于 $\ln x \leq \frac{x-1}{x+1}$;

当 $1 < x < +\infty$ 时, 原不等式等价于 $\ln x \geq \frac{x-1}{x+1}$;

$$\text{令} \quad f(x) = \ln x - \frac{x-1}{x+1}$$

$$\text{则} \quad f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+1}{x(x+1)^2} > 0 (x > 0)$$

又因为 $f(1) = 0$, 利用函数单调性可知

$$\text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } f(x) < 0, \text{ 即 } \ln x < \frac{x-1}{x+1}; \text{ 当 } 1 < x < +\infty \text{ 时, } f(x) > 0, \text{ 即 } \ln x > \frac{x-1}{x+1};$$

综上所述, 当 $x > 0$ 时, $(x^2 - 1) \ln x \geq (x - 1)^2$.

七【详解】 建立坐标轴如图所示,

解法1: 将抓起污泥的抓斗提升至井口需做功 $W = W_1 + W_2 + W_3$, 其中 W_1 是克服抓斗自重所作的功; W_2 是克服缆绳重力作的功; W_3 为提出污泥所作的功. 由题意知

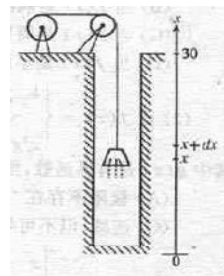
$$W_1 = 400N \times 30m = 12000J.$$

将抓斗由 x 处提升到 $x + dx$ 处, 克服缆绳重力所作的功为

$$\begin{aligned} dW_2 &= \text{缆绳每米重} \times \text{缆绳长} \times \text{提升高度} \\ &= 50(30 - x)dx, \end{aligned}$$

$$\text{从而} \quad W_2 = \int_0^{30} 50(30 - x)dx = 22500J.$$

在时间间隔 $[t, t + dt]$ 内提升污泥需做功为



$$\begin{aligned} dW_3 &= (\text{原始污泥重} - \text{漏掉污泥重}) \times \text{提升高度}(3dt) \\ &= (2000 - 20t)3dt \end{aligned}$$

将污泥从井底提升至井口共需时间 $\frac{30m}{3m/s} = 10s$,

$$\text{所以 } W_3 = \int_0^{10} 3(2000 - 20t)dt = 57000J.$$

因此, 共需做功

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = (12000 + 22500 + 57000)J = 91500J$$

解法2: 将抓起污泥的抓斗提升至井口需做功记为 W , 当抓斗运动到 x 处时, 作用力 $f(x)$ 包括

抓斗的自重 $400N$, 缆绳的重力 $50(30-x)N$, 污泥的重力 $(2000 - \frac{x}{3} \cdot 20)N$,

$$\text{即 } f(x) = 400 + 50(30-x) + 2000 - \frac{20}{3}x = 3900 - \frac{170}{3}x,$$

$$\text{于是 } W = \int_0^{30} \left(3900 - \frac{170}{3}x \right) dx = 3900x - \frac{85}{3}x^2 \Big|_0^{30} = 117000 - 24500 = 91500J$$

八【分析】 先写出切平面方程, 然后求 $\rho(x, y, z)$, 最后将曲面积分化成二重积分.

【详解】 点 $P(x, y, z) \in S$, S 在点 P 处的法向量为 $\vec{n} = \{x, y, 2z\}$, 设 (X, Y, Z) 为 π 上任意一点, 则 π 的方程为

$$x(X-x) + y(Y-y) + 2z(Z-z) = 0, \text{ 化简得 } \frac{x}{2}X + \frac{y}{2}Y + zZ = 1$$

由点到平面的公式, $O(0, 0, 0)$ 到 π 的距离

$$\rho(x, y, z) = \frac{|Ax + By + Cz|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\left| \frac{x}{2}x + \frac{y}{2}y + z \cdot z \right|}{\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + z^2}} = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{从而 } \iint_S \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS = \iint_S z \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2} dS$$

用投影法计算此第一类曲面积分, 将 S 投影到 xOy 平面, 其投影域为 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$

由曲面方程知 $z = \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)}, (x, y) \in D$, 于是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{2\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{2\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)}},$$

因此
$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} d\sigma = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)}} d\sigma$$

故有
$$\begin{aligned} \iint_S \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS &= \iint_S z \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2} dS \\ &= \frac{1}{4} \iint_D (4-x^2-y^2) d\sigma \stackrel{\text{极坐标}}{=} \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (4-r^2) r dr = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

九【详解】(1) 因为
$$\begin{aligned} \frac{1}{n}(a_n + a_{n+2}) &= \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x (1 + \tan^2 x) dx = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \sec^2 x dx \\ &= \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x d \tan x \stackrel{\tan x=t}{=} \frac{1}{n} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

又由部分和数列

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} (a_i + a_{i+2}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

有
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1,$$

因此
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2}) = 1.$$

(2) 先估计 a_n 的值, 因为

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx, \text{ 令 } t = \tan x, \text{ 则 } dt = \sec^2 x dx, \text{ 即 } dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

所以
$$a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} < \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1},$$

所以
$$\frac{a_n}{n^\lambda} < \frac{1}{n^\lambda(n+1)} < \frac{1}{n^{\lambda+1}},$$

由于 $\lambda+1>0$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda+1}}$ 收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 也收敛.

十【详解】根据题设, A^* 有一个特征值 λ_0 , 属于 λ_0 的一个特征向量为 $\alpha = (-1, -1, 1)^T$, 根据特征值和特征向量的概念, 有 $A^* \alpha = \lambda_0 \alpha$,

把 $|A| = -1$ 代入 $AA^* = |A|E$ 中, 得 $AA^* = |A|E = -E$, 则 $AA^* \alpha = -E\alpha = -\alpha$. 把 $A^* \alpha = \lambda_0 \alpha$ 代入, 于是 $AA^* \alpha = A\lambda_0 \alpha = \lambda_0 A\alpha$, 即 $-\alpha = \lambda_0 A\alpha$

$$\text{也即 } \lambda_0 \begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \Rightarrow \lambda_0 \begin{bmatrix} -a+1+c \\ -5-b+3 \\ -(1-c)-a \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

常数 λ_0 乘以矩阵 $\begin{bmatrix} -a+1+c \\ -5-b+3 \\ -(1-c)-a \end{bmatrix}$, 需用 λ_0 乘以矩阵的每一个元素

$$\lambda_0 \begin{bmatrix} -a+1+c \\ -5-b+3 \\ -(1-c)-a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0(-a+1+c) \\ \lambda_0(-5-b+3) \\ \lambda_0[-(1-c)-a] \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

矩阵相等, 则矩阵的对应元素都相同, 可得

$$\begin{cases} \lambda_0(-a+1+c)=1 & (1) \\ \lambda_0(-5-b+3)=1 & (2) \\ \lambda_0(-1+c-a)=-1 & (3) \end{cases}$$

因 $|A|=-1 \neq 0$, A 的特征值 $\lambda \neq 0$, A^* 的特征值 $\lambda^* = \frac{|A|}{\lambda} \neq 0$, 故 $\lambda_0 \neq 0$

由(1),(3)两式得

$$\lambda_0(-a+1+c) = -\lambda_0(-1+c-a),$$

两边同除 λ_0 , 得 $-a+1+c = -(-1+c-a)$

整理得 $a=c$, 代入(1)中, 得 $\lambda_0=1$. 再把 $\lambda_0=1$ 代入(2)中得 $b=-3$

又由 $|A|=-1$, $b=-3$ 以及 $a=c$, 有

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix} \xrightarrow{3\text{行}+1\text{行}} \begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{2\text{列}+1\text{列}} \begin{vmatrix} a & a-1 & a \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{按第3行展开}} (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a-1 & a \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \quad (\text{其中 } (-1)^{3+1} \text{ 的指数3, 1分别是1的行数和列数}) \\ &= 3(a-1) - 2a = a-3 = -1 \end{aligned}$$

故 $a=c=2$, 因此 $a=2, b=-3, c=2, \lambda_0=1$.

十一【详解】

“必要性”. 设 $B^T AB$ 为正定矩阵, 则由定义知, 对任意的实 n 维列向量 $x \neq 0$, 有 $x^T (B^T AB)x > 0$, 即 $(Bx)^T A(Bx) > 0$, 于是, $Bx \neq 0$, 即对任意的实 n 维列向量 $x \neq 0$, 都有 $Bx \neq 0$. (若 $Bx=0$, 则 $A(Bx)=A0=0$ 矛盾). 因此, $Bx=0$ 只有零解, 故有 $r(B)=n$ ($Bx=0$

有唯一零解的充要条件是 $r(B) = n$).

“充分性”. 因 A 为 m 阶实对称矩阵, 则 $A^T = A$, 故 $(B^T AB)^T = B^T A^T B = B^T AB$, 根据实对称矩阵的定义知 $B^T AB$ 也为实对称矩阵. 若 $r(B) = n$, 则线性方程组 $Bx = 0$ 只有零解, 从而对任意的实 n 维列向量 $x \neq 0$, 有 $Bx \neq 0$. 又 A 为正定矩阵, 所以对于 $Bx \neq 0$ 有 $(Bx)^T A(Bx) = x^T (B^T AB)x > 0$, 故 $B^T AB$ 为正定矩阵(对任意的实 n 维列向量 $x \neq 0$, 有 $x^T (B^T AB)x > 0$).

十二【详解】离散型随机变量边缘分布律的定义:

$$p_{i\cdot} = P\{X = x_i\} = \sum_j P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_j p_{ij}, i = 1, 2, \dots$$

$$p_{\cdot j} = P\{Y = y_j\} = \sum_i P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_i p_{ij}, j = 1, 2, \dots$$

(通俗点说就是在求关于 X 的边缘分布时, 就把对应 x 的所有 y 都加起来, 同理求关于 Y 的边缘分布时, 就把对应 y 的所有 x 都加起来)

$$\text{故 } P\{Y = y_1\} = p_{\cdot 1} = \sum_i P\{X = x_i, Y = y_1\} = \sum_i p_{i1} \quad \text{即}$$

$$P\{Y = y_1\} = P\{X = x_1, Y = y_1\} + P\{X = x_2, Y = y_1\}$$

而由表知 $P\{Y = y_1\} = \frac{1}{6}$, $P\{X = x_2, Y = y_1\} = \frac{1}{8}$, 所以

$$P\{X = x_1, Y = y_1\} = P\{Y = y_1\} - P\{X = x_2, Y = y_1\} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$$

又根据 X 和 Y 相互独立, 则有:

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} P\{Y = y_j\} \quad \text{即 } p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}$$

因 $P\{X = x_1, Y = y_1\} = \frac{1}{24}$, $P\{Y = y_1\} = \frac{1}{6}$, 而 $P\{X = x_1, Y = y_1\} = P\{X = x_1\} P\{Y = y_1\}$

$$\text{所以 } P\{X = x_1\} = \frac{P\{X = x_1, Y = y_1\}}{P\{Y = y_1\}} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{4}$$

再由边缘分布的定义有

$$P\{X = x_1\} = P\{X = x_1, Y = y_1\} + P\{X = x_1, Y = y_2\} + P\{X = x_1, Y = y_3\}$$

所以 $P\{X = x_1, Y = y_3\} = P\{X = x_1\} - P\{X = x_1, Y = y_1\} - P\{X = x_1, Y = y_2\}$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{24} - \frac{1}{8} = \frac{1}{12}$$

又由独立性知 $P\{X = x_1, Y = y_3\} = P\{X = x_1\} P\{Y = y_3\}$

所以
$$P\{Y = y_3\} = \frac{P\{X = x_1, Y = y_3\}}{P\{X = x_1\}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

由边缘分布定义有 $P\{Y = y_3\} = P\{X = x_1, Y = y_3\} + P\{X = x_2, Y = y_3\}$

所以
$$P\{X = x_2, Y = y_3\} = P\{Y = y_3\} - P\{X = x_1, Y = y_3\} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

再由 $\sum_i p_i = 1$, 所以 $P\{X = x_2\} = 1 - P\{X = x_1\} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

而 $P\{X = x_2\} = P\{X = x_2, Y = y_1\} + P\{X = x_2, Y = y_2\} + P\{X = x_2, Y = y_3\}$

故
$$P\{X = x_2, Y = y_2\} = P\{X = x_2\} - P\{X = x_2, Y = y_1\} - P\{X = x_2, Y = y_3\}$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

又 $\sum_j p_j = 1$, 所以 $P\{Y = y_2\} = 1 - P\{Y = y_1\} - P\{Y = y_3\} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

所以有:

$\begin{array}{c} Y \\ \backslash \\ X \end{array}$	y_1	y_2	y_3	$P\{X = x_i\} = p_i$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P\{Y = y_j\} = p_j$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

十三【详解】矩估计的实质在于用样本矩来估计相应的总体矩, 此题中被估参数只有一个, 故只需要用样本矩(样本均值)来估计总体的一阶原点矩(期望)

(1) 矩估计: 由期望的定义:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{\theta} x \frac{6x}{\theta^3} (\theta - x)dx = \int_0^{\theta} \left(\frac{6x^2}{\theta^2} - \frac{6x^3}{\theta^3} \right) dx \\ &= \frac{6}{\theta^2} \int_0^{\theta} x^2 dx - \frac{6}{\theta^3} \int_0^{\theta} x^3 dx = \frac{6}{\theta^2} \frac{\theta^3}{3} - \frac{6}{\theta^3} \frac{\theta^4}{4} = 2\theta - \frac{3\theta}{2} = \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ，用样本均值估计期望有 $EX = \bar{X}$ ，

即 $\frac{\theta}{2} = \bar{X}$ ，解得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta} = 2\bar{X}$

(2) 由随机变量方差的性质： $D(cX) = c^2 D(X)$ ，所以 $D(\hat{\theta}) = D(2\bar{X}) = 4D(\bar{X})$

又由独立随机变量方差的性质：若 X 和 Y 独立，则 $D(X+Y) = DX + DY$

因 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本，所以 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立且 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 与 X 服从同一分布，即 $DX_i = DX \quad i=1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} \text{而 } D(\bar{X}) &= D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X) \\ &= \frac{1}{n^2} D(X) \sum_{i=1}^n 1 = \frac{n}{n^2} D(X) = \frac{1}{n} D(X) \end{aligned}$$

方差的定义： $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ ，所以求方差只需要求出 $E(X^2)$ 和 $E(X)$

根据二阶原点矩的定义： $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$

故
$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{\theta} \frac{6x^3}{\theta^3} (\theta - x) dx = \int_0^{\theta} \left(\frac{6x^3}{\theta^2} - \frac{6x^4}{\theta^3} \right) dx = \frac{6\theta^2}{20}$$

而 $E(X) = \frac{\theta}{2}$ ，所以

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{6\theta^2}{20} - \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{\theta^2}{20}$$

因此 $\hat{\theta} = 2\bar{X}$ 的方差为 $D(\hat{\theta}) = D(2\bar{X}) = 4D(\bar{X}) = \frac{4}{n} D(X) = \frac{\theta^2}{5n}$ 。