

1999 年全国硕士研究生入学统一考试数二试题解析

一、填空题

(1) 【答案】 $y + 2x - 1 = 0$

【详解】 点 $(0, 1)$ 对应 $t = 0$ ，则曲线在点 $(0, 1)$ 的切线斜率为

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t \cos t - e^t \sin t}{e^t \sin 2t + 2e^t \cos 2t} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin 2t + 2 \cos 2t},$$

把 $t = 0$ 代入得 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$ ，所以该点处法线斜率为 -2 ，故所求法线方程为 $y + 2x - 1 = 0$ 。

(2) 【答案】 1

【详解】 $y(x)$ 是由方程 $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$ 所确定，所以当 $x = 0$ 时， $y = 1$ 。

对方程 $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$ 两边分别对 x 求导，得

$$\frac{2x + y'}{x^2 + y} = 3x^2 y + x^3 y' + \cos x,$$

把 $x = 0$ 和 $y = 1$ 代入得 $y'(0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 1$

(3) 【答案】 $\frac{1}{2} \ln(x^2 - 6x + 13) + 4 \arctan \frac{x-3}{2} + C$

【详解】 通过变换，将积分转化为常见积分，即

$$\begin{aligned} \int \frac{x+5}{x^2-6x+13} dx &= \int \frac{x-3}{x^2-6x+13} dx + \int \frac{8}{x^2-6x+13} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13} + \int \frac{8}{(x-3)^2+4} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2-6x+13) + 4 \int \frac{d(\frac{x-3}{2})}{(\frac{x-3}{2})^2+1} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2-6x+13) + 4 \arctan \frac{x-3}{2} + C \end{aligned}$$

(4) 【答案】 $\frac{\sqrt{3}+1}{12}\pi$

【详解】按照平均值的定义有

$$\bar{y} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

作变换令 $x = \sin t$, 则 $dx = \cos t dt$, 所以

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 t \cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} dt = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t dt \\ &= (\sqrt{3}+1) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = (\sqrt{3}+1) \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{12} \pi \end{aligned}$$

(5) 【答案】 $y = C_1 e^{-2x} + \left(C_2 + \frac{1}{4}x \right) e^{2x}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

【分析】先求出对应齐次方程的通解, 再求出原方程的一个特解.

【详解】原方程对应齐次方程 $y'' - 4y = 0$ 的特征方程为: $\lambda^2 - 4 = 0$, 解得 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$,

故 $y'' - 4y = 0$ 的通解为 $y_1 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$,

由于非齐次项为 $f(x) = e^{2x}$, 因此原方程的特解可设为 $y^* = A x e^{2x}$, 代入原方程可求得

$$A = \frac{1}{4}, \text{ 故所求通解为 } y = y_1 + y^* = C_1 e^{-2x} + \left(C_2 + \frac{1}{4}x \right) e^{2x}$$

二、选择题

(1) 【答案】(D)

【详解】由于可导必连续, 连续则极限必存在, 可以从函数可导性入手.

因为
$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x g(x) = 0,$$

从而, $f'(0)$ 存在, 且 $f'(0) = 0$, 故正确选项为(D).

(2) 【答案】(C)

【详解】当 $x \rightarrow 0$ 有,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{5x} \frac{\sin t}{t} dt}{\int_0^{\sin x} \frac{1}{(1+t)^t} dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5}{(1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \cdot \cos x} \\ &= 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{1}{\lim_{\sin x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = 5 \times 1 \times \frac{1}{e \times 1} = \frac{5}{e}\end{aligned}$$

所以当 $x \rightarrow 0$ 时 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 同阶但不等价的无穷小.

(3) 【答案】(A)

【详解】应用函数定义判定函数的奇偶性、周期性和单调性.

$f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 可以表示为 $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$, 于是

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt + C \stackrel{u=-t}{=} \int_0^x f(-u)d(-u) + C.$$

当 $f(x)$ 为奇函数时, $f(-u) = -f(u)$, 从而有

$$F(-x) = \int_0^x f(u)du + C = \int_0^x f(t)dt + C = F(x)$$

即 $F(x)$ 为偶函数. 故(A)为正确选项.

(B)、(C)、(D)可分别举反例如下:

$f(x) = x^2$ 是偶函数, 但其原函数 $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$ 不是奇函数, 可排除(B);

$f(x) = \cos^2 x$ 是周期函数, 但其原函数 $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$ 不是周期函数, 可排除

(C);

$f(x) = x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增函数, 但其原函数 $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$

内非单调增函数, 可排除(D).

(4) 【答案】(C)

【详解】

【方法1】“必要性”: 数列极限的定义 “对于任意给定的 $\varepsilon_1 > 0$, 存在 $N_1 > 0$, 使得当 $n > N_1$

时恒有 $|x_n - a| < \varepsilon_1$ ”. 由该定义可以直接推出题中所述, 即必要性; “充分性”: 对于任

意给定的 $\varepsilon_1 > 0$, 取 $\varepsilon = \min\left\{\frac{\varepsilon_1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$, 这时 $\varepsilon \in (0, 1)$, 由已知, 对于此 ε 存在 $N > 0$,

使得当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < 2\varepsilon$, 现取 $N_1 = N - 1$, 于是有当 $n \geq N > N_1$ 时, 恒

有 $|x_n - a| \leq \frac{2}{3}\varepsilon_1 < \varepsilon_1$. 这证明了数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a . 故(C)是正确的.

【方法2】数列极限的精确定义是: 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a . 这里要抓住的关键是 ε 要能够任意小, 才能使 $|x_n - a|$ 任意小.

将本题的说法改成: 对任意 $\varepsilon_1 = 2\varepsilon \in (0, 2) > 0$, 总存在 $N_1 > 0$, 使得当

$n \geq N > N_1$ 时, 有 $|x_n - a| < 2\varepsilon = \varepsilon_1$, 则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a .

由于 $\varepsilon_1 \in (0, 2)$ 可以任意小, 所以 $|x_n - a|$ 能够任意小. 故两个说法是等价的.

(5) **【答案】** (B)

【详解】 利用行列式性质, 计算出行列式是几次多项式, 即可作出判别.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow[\text{4列-1列}]{\substack{\text{2列-1列} \\ \text{3列-1列}}} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{4列} + \text{2列}} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix} \quad (\text{若 } A, B, C \text{ 均为 } n \text{ 阶方阵, 则 } \begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix} = |A| \cdot |C|) \\
 &= [(x-2) \cdot 1 - (2x-2) \cdot 1] \times [-6(x-2) - (-1)(x-7)] \\
 &= (-x) \times (-5x+5) = 5x \cdot (x-1)
 \end{aligned}$$

故 $f(x) = x \cdot (5x-5) = 0$ 有两个根 $x_1 = 0, x_2 = 1$, 故应选(B).

三 **【详解】** 进行等价变化, 然后应用洛必达法则,

$$\text{【方法1】} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x})(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})}{(x \ln(1+x) - x^2)(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x(\ln(1+x) - x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2 \frac{\sin x}{x} \ln(1+x) - x}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\ln(1+x) - x} \stackrel{\text{洛}}{=} \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) \sin x}{-x} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{【方法2】} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x(\ln(1+x) - x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{2x(\ln(1+x) - x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x)}{2x(\ln(1+x) - x)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\ln(1+x) - x}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2}{\ln(1+x) - x} \stackrel{\text{洛}}{=} \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{-x/(1+x)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{1+x} = -\frac{1}{2}$$

四【详解】采用分部积分法

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx &= -\int_1^{+\infty} \arctan x d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} \arctan x \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = \frac{\pi}{4} + \left[\ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{4} + \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

$$\text{五【详解】将原方程化简} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$\text{令 } \frac{y}{x} = u, \text{ 则 } \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}, \text{ 代入上式, 得 } u + x \frac{du}{dx} = u + \sqrt{1+u^2},$$

$$\text{化简并移项, 得 } \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x},$$

$$\text{由积分公式得 } \ln(u + \sqrt{1+u^2}) = \ln(Cx), \text{ 其中 } C \text{ 是常数,}$$

$$\text{因为 } x > 0, \text{ 所以 } C > 0, \text{ 去掉根号, 得 } u + \sqrt{1+u^2} = Cx, \text{ 即 } \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = Cx,$$

把 $y|_{x=1} = 0$ 代入并化简, 得 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}, x > 0$

六【详解】建立坐标轴如图所示,

解法1: 将抓起污泥的抓斗提升至井口需做功 $W = W_1 + W_2 + W_3$, 其中 W_1 是克

作的功; W_2 是克服缆绳重力作的功; W_3 为提出污泥所作的功. 由题意知

$$W_1 = 400N \times 30m = 12000J.$$

将抓斗由 x 处提升到 $x + dx$ 处, 克服缆绳重力所作的功为

$$\begin{aligned} dW_2 &= \text{缆绳每米重} \times \text{缆绳长} \times \text{提升高度} \\ &= 50(30 - x)dx, \end{aligned}$$

$$\text{从而 } W_2 = \int_0^{30} 50(30 - x)dx = 22500J.$$

在时间间隔 $[t, t + dt]$ 内提升污泥需做功为

$$\begin{aligned} dW_3 &= (\text{原始污泥重} - \text{漏掉污泥重}) \times \text{提升高度}(3dt) \\ &= (2000 - 20t)3dt \end{aligned}$$

$$\text{将污泥从井底提升至井口共需时间 } \frac{30m}{3m/s} = 10s,$$

$$\text{所以 } W_3 = \int_0^{10} 3(2000 - 20t)dt = 57000J.$$

因此, 共需做功

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = (12000 + 22500 + 57000)J = 91500J$$

解法2: 将抓起污泥的抓斗提升至井口需做功记为 W , 当抓斗运动到 x 处时, 作用力 $f(x)$ 包

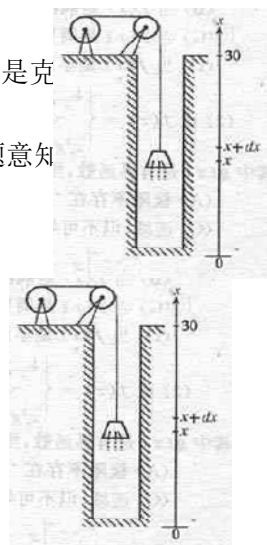
括抓斗的自重 $400N$, 缆绳的重力 $50(30 - x)N$, 污泥的重力 $(2000 - \frac{x}{3} \cdot 20)N$,

$$\text{即 } f(x) = 400 + 50(30 - x) + 2000 - \frac{20}{3}x = 3900 - \frac{170}{3}x,$$

于是

$$W = \int_0^{30} \left(3900 - \frac{170}{3}x \right) dx = 3900x - \frac{85}{3}x^2 \Big|_0^{30} = 117000 - 24500 = 91500J$$

七【详解】函数的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, 对函数求导, 得



$$y' = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}, \quad y'' = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

令 $y' = 0$ 得驻点 $x = 0, x = 3$; 令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$. 因此, 需以 $0, 1, 3$ 为分界点来讨论, 列表讨论如下:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
y'	$+$	0	$+$	$-$	0	$+$
y	凸, 增	拐点	凹, 增	凹, 减	极小值	凹, 增

由此可知,

(1) 函数的单调增区间为 $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$, 单调减区间为 $(1, 3)$, 极小值为 $y|_{x=3} = \frac{27}{4}$.

(2) 函数图形在区间 $(-\infty, 0)$ 内是向上凸的, 在区间 $(0, 1), (1, +\infty)$ 内是向上凹的, 拐点为 $(0, 0)$ 点.

(3) 由 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$, 可知 $x = 1$ 是函数图形的铅直渐近线.

又因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x-1)^2} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x^2 - x}{(x-1)^2} \right] = 2$$

故 $y = x + 2$ 是函数的斜渐近线.

八、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(0) = 0$,

证明: 在开区间 $(-1, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f'''(\xi) = 3$.

【详解】解法 1: 由麦克劳林公式得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3, \text{ 其中 } \eta \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间, } x \in [-1, 1]$$

分别令 $x = -1, x = 1$ 并结合已知条件得

$$f(-1) = f(0) + \frac{1}{2} f''(0) - \frac{1}{6} f'''(\eta_1) = 0, -1 < \eta_1 < 0$$

$$f(1) = f(0) + \frac{1}{2} f''(0) + \frac{1}{6} f'''(\eta_2) = 1, 0 < \eta_2 < 1$$

两式相减, 得

$$f'''(\eta_2) + f'''(\eta_1) = 6$$

由 $f'''(x)$ 的连续性, 知 $f'''(x)$ 在区间 $[\eta_1, \eta_2]$ 上有最大值和最小值, 设它们分别为 M 和 m , 则有

$$m \leq \frac{1}{2} [f'''(\eta_2) + f'''(\eta_1)] \leq M$$

再由连续函数的介值定理知, 至少存在一点 $\xi \in [\eta_1, \eta_2] \subset (-1, 1)$, 使

$$f'''(\xi) = \frac{1}{2} [f'''(\eta_2) + f'''(\eta_1)] = 3$$

解法 2: 构造函数 $\varphi(x)$, 使得 $x \in [-1, 1]$ 时 $\varphi'(x)$ 有三个 0 点, $\varphi''(x)$ 有两个 0 点, 从而使用罗尔定理证明 ξ 必然存在.

设具有三阶连续导数 $\varphi(x) = f(x) + ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$\text{令 } \begin{cases} \varphi(-1) = f(-1) - a + b - c + d = 0 \\ \varphi(0) = f(0) + d = 0 \\ \varphi(1) = f(1) + a + b + c + d = 0 \\ \varphi'(0) = f'(0) + c = 0 \end{cases}, \text{ 将 } \begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \text{ 代入得 } \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = f(0) - \frac{1}{2} \\ c = 0 \\ d = -f(0) \end{cases}$$

$$\text{代入 } \varphi(x) \text{ 得 } \varphi(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^3 + (f(0) - \frac{1}{2})x^2 - f(0)$$

由罗尔定理可知, 存在 $\eta_1 \in (-1, 0), \eta_2 \in (0, 1)$, 使 $\varphi'(\eta_1) = 0, \varphi'(\eta_2) = 0$

又因为 $\varphi'(0) = 0$, 再由罗尔定理可知, 存在 $\xi_1 \in (\eta_1, 0), \xi_2 \in (0, \eta_2)$, 使得 $\varphi''(\xi_1) = 0, \varphi''(\xi_2) = 0$

再由罗尔定理知, 存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (\eta_1, \eta_2) \subset (-1, 1)$, 使 $\varphi'''(\xi) = f'''(\xi) - 3 = 0$

即 $f'''(\xi) = 3$.

九【详解】 如图, 曲线 $y = y(x)$ 上点 $P(x, y)$ 处的切线方程为 $Y - y(x) = y'(x)(X - x)$

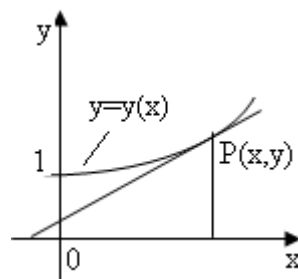
所以切线与 x 轴的交点为 $\left(x - \frac{y}{y'}, 0\right)$

由于 $y'(x) > 0, y(0) = 1$, 因此 $y(x) > 1 > 0 (x > 0)$

$$\text{于是 } S_1 = \frac{1}{2} y \left| x - \left(x - \frac{y}{y'} \right) \right| = \frac{y^2}{2y'}.$$

$$\text{又 } S_2 = \int_0^x y(t) dt$$

根据题设 $2S_1 - S_2 = 1$, 得 $2 \cdot \frac{y^2}{2y'} - \int_0^x y(t) dt = 1$,



两边对 x 求导并化简得 $yy'' = (y')^2$

这是可降阶的二阶常微分方程, 令 $p = y'$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$,

上述方程化为 $yp \frac{dp}{dy} = p^2$, 分离变量得 $\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$, 解得 $p = C_1 y$, 即 $\frac{dy}{dx} = C_1 y$,

从而有 $y = C_1 e^x + C_2$, 根据 $y(0) = 1, y'(0) = 1$, 可得 $C_1 = 1, C_2 = 0$,

故所求曲线得方程为 $y = e^x$.

十【详解】利用单调有界必有极限的准则来证明. 先将 a_n 形式化简,

$$\text{因为 } \int_1^n f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \cdots + \int_{n-1}^n f(x) dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx$$

$$\text{所以 } a_n = \sum_{i=1}^{n-1} f(k) + f(n) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} [f(k) - f(x)] dx + f(n)$$

又因为 $f(x)$ 单调减少且非负, $k \leq x \leq k+1$, 所以有

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} [f(k) - f(x)] dx \geq 0, \\ f(n) \geq 0 \end{cases} \text{ 故 } a_n \geq 0;$$

$$\text{又因为 } a_{n+1} - a_n = \left[\sum_{i=1}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f(x) dx \right] - \left[\sum_{i=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\sum_{i=1}^{n+1} f(k) - \sum_{i=1}^n f(k) \right] - \left[\int_1^{n+1} f(x) dx - \int_1^n f(x) dx \right] \\
&= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) dx = \int_n^{n+1} [f(n+1) - f(x)] dx \leq 0
\end{aligned}$$

所以 $\{a_n\}$ 单调减少, 因为单调有界必有极限, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在.

十一【详解】题设条件 $A^*X = A^{-1} + 2X$

上式两端左乘 A , 得 $AA^*X = AA^{-1} + 2AX$

因为 $AA^* = |A|E, AA^{-1} = E$, 所以 $|A|X = E + 2AX \Rightarrow (|A|E - 2A)X = E$

根据可逆矩阵的定义: 对于矩阵 A_n , 如果存在矩阵 B_n , 使得 $AB = BA = E$, 则称 A 为

可逆矩阵, 并称 B 是 A 的逆矩阵, 故 $(|A|E - 2A), X$ 均是可逆矩阵, 且

$$X = (|A|E - 2A)^{-1}$$

$$\begin{aligned}
\text{又} \quad |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{3行+1行}]{\text{2行+1行}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{2}]{\text{1行}-3行 \times \frac{1}{2}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow[\text{2}]{\text{1行}-2行 \times \frac{1}{2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4
\end{aligned}$$

因为常数 k 与矩阵 A 相乘, A 的每个元素都要乘以 k , 故

$$|A|E = 4E = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad 2A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned}
|A|E - 2A &= 2(2E - A) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{对应元素相减}) \\
X &= (|A|E - 2A)^{-1} = \left(2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad ((kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1})
\end{aligned}$$

用初等行变换求逆, 当用初等行变换将矩阵 A 化为单位矩阵时, 经过相同的初等行变

换，单位矩阵 E 化成了 A^{-1} ，即 $(A \ E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \ A^{-1})$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{2\text{行}-1\text{行} \\ 3\text{行}+1\text{行}}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\text{行}+3\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{2\text{行} \times \frac{1}{2} \\ 3\text{行} \times \frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{1\text{行}-3\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\text{行}+2\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

故
$$X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

十二【概念】向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 以 $\alpha_i, i=1, 2, 3, 4$ 为列向量组成的线性齐次

方程组 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] X = 0$ 只有零解

向量 α 能否由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出 $\Leftrightarrow$ 以 $\alpha_i, i=1, 2, 3, 4$ 为列向量组成的线性

非齐次方程组 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = \alpha$ 是否有解

【详解】作方程组 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = \alpha$ ，并对增广矩阵作初等行变换，

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 10 & 6 \\ 3 & 1 & p+2 & p & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 2\text{行}-1\text{行} \\ 3\text{行}-1\text{行} \\ 4\text{行}-1\text{行} \times 3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & -4 & 12 & 2 \\ 0 & 4 & p-7 & p+6 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{3\text{行}+2\text{行} \times 3 \\ 4\text{行}+2\text{行} \times 2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & p-9 & p-2 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3\text{行}\times(-\frac{1}{7})} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & \vdots & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & p-9 & p-2 & \vdots & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{4\text{行}-3\text{行}\times(p-9)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & \vdots & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p-2 & \vdots & 1-p \end{bmatrix}$$

(1) 当 $p \neq 2$ 时, $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha) = 4$, 方程组有唯一解的充要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩, 且等于未知量的个数, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 且方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)X = \alpha$ 有唯一解, 其同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4 \\ 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_3 = 1 \\ (p-2)x_4 = 1-p \end{cases}, \text{解得 } x_1 = 2, x_2 = \frac{3p-4}{p-2}, x_3 = 1, x_4 = \frac{1-p}{p-2}$$

代入 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = \alpha$ 中, 即 α 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出, 且表出式为

$$\alpha = 2\alpha_1 + \frac{3p-4}{p-2}\alpha_2 + \alpha_3 + \frac{1-p}{p-2}\alpha_4$$

(2) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 以 $\alpha_i, i=1, 2, 3, 4$ 为列向量组成的线性齐次方程

组 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]X = 0$ 有非零解

当 $p = 2$ 时,

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & \vdots & 4 \\ 1 & -3 & 2 & -6 & \vdots & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 10 & \vdots & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & \vdots & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & \vdots & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$$

初等变换不改变向量组的秩, $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$, 系数矩阵的秩小于未知量的个数,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]X = 0$$

有非零解, 故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 列向量组经过初等行变换, 其对应的部分列向

量组具有相同的线性相关性. 在 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & \vdots & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$ 中, 由 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ 或

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \text{ 知, } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ (或 } \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4 \text{) 线性无关, 是其极大线性无关组.}$$