

2024 年考研数学（二）真题及答案

一、选择题：（1-10 小题，每小题5 分，共50 分。下列每题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. 函数 $f(x) = \left| x \right|^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}}$ 的第一类间断点的个数为 ()

- A. 3
- B. 2
- C. 1
- D. 0

【答案】C

2. 已知 $\begin{cases} x = 1 + t^3 \\ y = e^{t^2} \end{cases}$ ，则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[f\left(2 + \frac{2}{x}\right) - f(2) \right] = ()$

- A. $2e$
- B. $\frac{4}{3}e$
- C. $\frac{2}{3}e$
- D. $\frac{e}{3}$

【答案】B

3. 已知 $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin t^3 dt$, $g(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则 ()

- A. $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为奇函数
- B. $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数
- C. $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为偶函数
- D. $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数

【答案】D

4. 已知数列 $\{a_n\}$ ($a_n \neq 0$), 若 $\{a_n\}$ 发散, 则 ()

A. $\left\{a_n + \frac{1}{a_n}\right\}$ 发散

B. $\left\{a_n - \frac{1}{a_n}\right\}$ 发散

C. $\left\{e^{a_n} + \frac{1}{e^{a_n}}\right\}$ 发散

D. $\left\{e^{a_n} - \frac{1}{e^{a_n}}\right\}$ 发散

【答案】D

已知函数 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$, 则在点 $(0, 0)$ 处 ().

5.

A. $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ 连续, $f(x, y)$ 可微

B. $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ 连续, $f(x, y)$ 不可微

C. $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ 不连续, $f(x, y)$ 可微

D. $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ 不连续, $f(x, y)$ 不可微

【答案】C

6. 设 $f(x, y)$ 是连续函数, 则 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy = (\quad)$.

(A) $\int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x, y) dx$

(B) $\int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx$

(C) $\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x, y) dx$

(D) $\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx$

【答案】A

7. 设非负函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 给定以下三个命题:

(1) 若 $\int_0^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛, 则 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛;

(2) 若存在 $p > 1$, 使极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x)$ 存在, 则 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛;

(3) 若 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则存在 $p > 1$, 使极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x)$ 存在;

其中正确的个数是 ()

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

【答案】B

8.

8. 设 A 为三阶矩阵, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 若 $P^T A P^2 = \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix}$, 则矩阵 A 为 ()

(A) $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

【答案】C

9. 设 A^* 为四阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 若 $A(A-A^*)=O$, 且 $A \neq A^*$, 则 $r(A)$ 的可能取值为 ()

A. 0 或 1

B. 1 或 3

C. 2 或 3

D. 1 或 2

【答案】D

10. 设A, B均为2阶矩阵, 且 $AB=BA$, 则“A有两个不相等的特征值”是“B可对角化”的 ()

A. 充要条件

B. 充分非必要条件

C. 必要非充分条件

D. 既非充分又非必要条件

【答案】B

二、填空题:11-16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分请将答案写在答题纸指定位置上。

11. 曲线 $y^2=x$ 在点 $(0, 0)$ 处的曲率圆方程为_____.

【答案】 $(x-1/2)^2+y^2=1/4$

12. 函数 $f(x, y) = 2x^3 - 9x^2 - 6y^2 + 12x + 24y$ 的极值点是_____.

【答案】 $(1, 1)$

13. 微积方程 $y' = \frac{1}{(x+y)^2}$ 满足 $y(1) = 0$ 的解为_____.

【答案】 $y - \arctan(x+y) + \pi/4 = 0$

14. 已知函数 $f(x) = x^2(e^x - 1)$, 则 $f^{(5)}(x) =$ _____.

【答案】 $3!e$

15. 某物体以速度 $v(t) = t + k \sin \pi t$ 做线运动, 若它从 $t=0$ 到 $t=3$ 的时间段内平均速度是 $\frac{5}{2}$, 则 $k =$ _____.

【答案】 $3\pi/2$

16. 设向量 $a_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \\ a \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 若 a_1, a_2, a_3 线性相关, 且其中任意

两个向量均为线性无关, 则 $ab =$ _____.

【答案】 -4

三、解答题：（17-22 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。）

17. 设平面有界区域 D 位于第一象限，由曲线 $xy = \frac{1}{3}$ ， $xy = 3$ 与直线 $y = \frac{1}{3}x$ ， $y = 3x$ 围成，计算

$$\iint_D (1+x-y) dx dy$$

【答案】 $8\ln 3/3$

18. 设 $y = y(x)$ 满足方程 $xy'' + xy' - 9y = 0$ ，且 $y|_{x=1} = 2$ ， $y'|_{x=1} = 6$

(1) 利用变换 $x = e^t$ 化简方程，并求 $y(x)$ 的表达式

(2) 求 $\int_1^2 y(x) \sqrt{4-x^2} dx$

【答案】(1) $y(x) = 2x^3$ ；(2) $22\sqrt{3}/5$

19. 设 $t > 0$ ，求曲线 $y = \sqrt{x}e^{-x}$ 与直线 $x = t$ ， $x = 2t$ 及 x 轴所围平面图形，绕 x 轴旋转所得的旋转体体积为 $V(t)$ ，求 $V(t)$ 的最大值.

【答案】最大值为 $V(\ln 2) = \pi \ln 2 / 16 + 3\pi / 64$

20. 设 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导， $g(x, y) = f(2x + y, 3x - y)$ ，且 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - 6 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1$

(1) 求 $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$

(2) 若 $\frac{\partial f(u, 0)}{\partial u} = ue^{-u}$ ，且 $f(0, v) = \frac{1}{50}v^2 - 1$ ，求 $f(u, v)$ 的表达式

【答案】(1) $\frac{1}{25}$ ；(2) $f(u, v) = \frac{1}{25}uv - (u+1)e^{-u} + \frac{1}{50}v^2$

21. 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数，且 $f'(0) = f''(1)$ ， $|f(x)| \leq 1$ 。证明：

(1) 当 $x \in (0, 1)$ 时， $|f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| \leq \frac{x(1-x)}{2}$

(2) $\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0) + f(1)}{2} \right| \leq \frac{1}{12}$

【答案】(1) 泰勒公式在 0 和 1 处展开即可证明；(2) 由 (1) 的不等式两边积分即可证明

22. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}$, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T B A x$

已知方程组 $Ax = 0$ 的解是 $B^T x = 0$ 的解, 但两个方程组不同解。

(1) 求 a, b 的值,

(2) 求正交矩阵 $x = Qy$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形

【答案】(1) $a = 1, b = 2$

(2) $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, f(x_1, x_2, x_3) = 6y_1^2$