

绝密★启用前

2023 年全国硕士研究生招生考试

数学（三）

（科目代码：303）

一、选择题:1~10 小题,每小题 5 分,共 50 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选选项前的字母填在答题卡指定位置.

(1) 已知函数 $f(x, y) = \ln(y + |x \sin y|)$, 则()

- (A) $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,1)}$ 不存在, $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(0,1)}$ 存在
- (B) $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,1)}$ 存在, $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(0,1)}$ 不存在
- (C) $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,1)}$, $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(0,1)}$ 均存在
- (D) $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,1)}$, $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(0,1)}$ 均不存在

【答案】(A)

【解析】 $f(0,1)=0$, 由偏导数的定义

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,1) - f(0,1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 1 |x|)}{x} = \sin 1 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x},$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$, 所以 $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,1)}$ 不存在,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(0,1)} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(0,y) - f(0,1)}{y-1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\ln y}{y-1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y-1}{y-1} = 1, \text{ 所以 } \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(0,1)} \text{ 存在.}$$

(2) 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \leq 0 \\ (x+1)\cos x, & x > 0 \end{cases}$ 的原函数为()

- (A) $F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2} - x), & x \leq 0 \\ (x+1)\cos x - \sin x, & x > 0 \end{cases}$
- (B) $F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + 1, & x \leq 0 \\ (x+1)\cos x - \sin x, & x > 0 \end{cases}$

$$(C) \quad F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2}+x), & x \leq 0 \\ (x+1)\sin x + \cos x, & x > 0 \end{cases}$$

$$(D) \quad F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2}+x)+1, & x \leq 0 \\ (x+1)\sin x + \cos x, & x > 0 \end{cases}$$

【答案】 (D)

【解析】 当 $x \leq 0$ 时,

$$\int f(x)dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C_1$$

当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int (x+1)\cos x dx = \int (x+1)d\sin x = (x+1)\sin x - \int \sin x dx \\ &= (x+1)\sin x + \cos x + C_2 \end{aligned}$$

原函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则在 $x=0$ 处

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C_1 = C_1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1)\sin x + \cos x + C_2 = 1 + C_2$$

所以 $C_1 = 1 + C_2$, 令 $C_2 = C$, 则 $C_1 = 1 + C$, 故

$$\int f(x)dx = \begin{cases} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 1 + C, & x \leq 0 \\ (x+1)\sin x + \cos x + C, & x > 0 \end{cases},$$

结合选项, 令 $C=0$, 则 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2}+x)+1, & x \leq 0 \\ (x+1)\sin x + \cos x, & x > 0 \end{cases}$.

(3) 已知微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ 的解在 $(-\infty, \infty)$ 上有界, 则()

(A) $a < 0, b > 0$

(B) $a > 0, b > 0$

(C) $a = 0, b > 0$

(D) $a = 0, b < 0$

【答案】 (C)

【解析】 微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$,

当 $\Delta = a^2 - 4b > 0$ 时, 特征方程有两个不同的实根 λ_1, λ_2 , 则 λ_1, λ_2 至少有一个不等于零,

若 C_1, C_2 都不为零, 则微分方程的解 $y = C_1 e^{-\lambda_1 x} + C_2 e^{-\lambda_2 x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 无界;

当 $\Delta = a^2 - 4b = 0$ 时, 特征方程有两个相同的实根, $\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2}$,

若 $C_2 \neq 0$, 则微分方程的解 $y = C_1 e^{-\frac{a}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{a}{2}x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 无界;

当 $\Delta = a^2 - 4b < 0$ 时, 特征方程的根为 $\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} i$,

则通解为 $y = e^{-\frac{a}{2}x} (C_1 \cos \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} x)$,

此时, 要使微分方程的解在 $(-\infty, +\infty)$ 有界, 则 $a = 0$, 再由 $\Delta = a^2 - 4b < 0$, 知 $b > 0$.

(4) 已知 $a_n < b_n (n = 1, 2, \dots)$, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛, 则“级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对

收敛”是“级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛”的()

(A) 充分必要条件

(B) 充分不必要条件

(C) 必要不充分条件

(D) 既不充分也不必要条件

【答案】 (A)

【解析】 由条件知 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ 为收敛的正项级数, 进而绝对收敛;

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则由 $|b_n| = |b_n - a_n + a_n| \leq |b_n - a_n| + |a_n|$ 与比较判别法, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

绝对收敛;

设 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 则由 $|a_n| = |a_n - b_n + b_n| \leq |b_n - a_n| + |b_n|$ 与比较判别法, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

绝对收敛.

(5) 设 A, B 为 n 阶可逆矩阵, E 为 n 阶单位矩阵, M^* 为矩阵 M 的伴随

矩阵, 则 $\begin{pmatrix} A & E \\ 0 & B \end{pmatrix}^* = (\quad)$

(A) $\begin{pmatrix} |A|B^* & -B^*A^* \\ 0 & |B|A^* \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} |B|A^* & -A^*B^* \\ 0 & |A|B^* \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} |B|A^* & -B^*A^* \\ 0 & |A|B^* \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} |A|B^* & -A^*B^* \\ 0 & |B|A^* \end{pmatrix}$

【答案】 (B)

【解析】 结合伴随矩阵的核心公式, 代入(B)计算知

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & E \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |B|A^* & -A^*B^* \\ 0 & |A|B^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} |B|AA^* & -AA^*B^* + |A|B^* \\ 0 & |A|BB^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |B||A|E & -|A|B^* + |A|B^* \\ 0 & |A||B|E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |B||A|E & 0 \\ 0 & |A||B|E \end{pmatrix} = |A||B|E, \text{ 故(B)正确.} \end{aligned}$$

(6) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 - 4(x_2 - x_3)^2$ 的规范形为()

(A) $y_1^2 + y_2^2$

(B) $y_1^2 - y_2^2$

(C) $y_1^2 + y_2^2 - 4y_3^2$

(D) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

【答案】 (B)

【解析】 由已知 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2x_3$,

则其对应的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda + 3 & -4 \\ -1 & -4 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 7)(\lambda - 3) = 0$, 得 A 的特征值为 $3, -7, 0$

故选(B).

(7) 已知向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 若 γ 既可由 α_1, α_2 线性

表示, 也可由 β_1, β_2 线性表示, 则 $\gamma = (\quad)$

$$(A) \quad k \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, k \in R$$

$$(B) \quad k \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, k \in R$$

$$(C) \quad k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, k \in R$$

$$(D) \quad k \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, k \in R$$

【答案】(D)

【解析】设 $r = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = y_1\beta_1 + y_2\beta_2$

则 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 - y_1\beta_1 - y_2\beta_2 = 0$

$$\text{又 } (\alpha_1, \alpha_2, -\beta_1, -\beta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & -9 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

故 $(x_1, x_2, y_1, y_2)^T = c(-3, 1, -1, 1)^T, c \in R$

所以 $r = -c\beta_1 + c\beta_2 = c(-1, -5, -8)^T = -c(1, 5, 8)^T = k(1, 5, 8)^T, k \in R$

(8) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $E(|X - EX|) = (\quad)$

$$(A) \quad \frac{1}{e} \quad (B) \quad \frac{1}{2} \quad (C) \quad \frac{2}{e} \quad (D) \quad 1$$

【答案】(C)

【解析】法 1: 由题可知 $EX = 1$, 所以 $|X - EX| = \begin{cases} 1, & X = 0 \\ X - 1, & X = 1, 2, \dots \end{cases}$

故, $E|X - EX| = 1 \cdot P\{X = 0\} + \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)P\{X = k\}$

$$= \frac{1}{e} + \sum_{k=0}^{\infty} (k-1)P\{X = k\} - (0-1)P\{X = 0\}$$

$$= \frac{1}{e} + E(X-1) - (0-1)\frac{1}{e} = \frac{2}{e}, \text{ 选 (C)}$$

法 2: 随机变量 X 服从参数为 1 泊松分布, 即 $P(X = k) = \frac{1}{k!}e^{-1} (k = 0, 1, 2, \dots)$

期望 $E(X) = 1$.

$$\begin{aligned}
E(|X - E(X)|) &= E(|X - 1|) = 1 \cdot \frac{1}{0!} e^{-1} + 0 \cdot \frac{1}{1!} e^{-1} + 1 \cdot \frac{1}{2!} e^{-1} + \dots + (k-1) \cdot \frac{1}{k!} e^{-1} + \dots \\
&= e^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \cdot \frac{1}{k!} e^{-1} = e^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{k!} e^{-1} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{-1} = e^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} e^{-1} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{-1} \\
&= e^{-1} + (e-1)e^{-1} - (e-1-1)e^{-1} = 2e^{-1} \quad \text{选 (C)}.
\end{aligned}$$

(9) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 的简单随机样本, $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ 为来自总体 $N(\mu_2, 2\sigma^2)$ 的简单随机样本, 且两样本相互独立, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$,

$$\bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i, \quad S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad S_2^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2, \quad \text{则()}$$

$$(A) \quad \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n, m)$$

$$(B) \quad \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1, m-1)$$

$$(C) \quad \frac{2S_1^2}{S_2^2} \sim F(n, m)$$

$$(D) \quad \frac{2S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1, m-1)$$

【答案】(D)

【解析】 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的样本方差 $S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_m \text{ 的样本方差 } S_2^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2$$

$$\text{则 } \frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \quad \frac{(m-1)S_2^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(m-1), \quad \text{两个样本相互独立}$$

$$\text{所以 } \frac{\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} / (n-1)}{\frac{(m-1)S_2^2}{2\sigma^2} / (m-1)} = \frac{S_1^2 / \sigma^2}{S_2^2 / 2\sigma^2} = \frac{2S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1, m-1) \quad \text{选 D.}$$

(10) 设 X_1, X_2 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 $\sigma (\sigma > 0)$ 是未知参数, 记 $\sigma = a|x_1 - x_2|$, 若 $E(\sigma) = \sigma$, 则 $a = (\quad)$

$$(A) \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$(B) \quad \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

(C) $\sqrt{\pi}$

(D) $\sqrt{2\pi}$

【答案】(A)

【解析】由题可知 $X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$. 令 $Y = X_1 - X_2$, 则 Y 的概率密度为

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2 \cdot 2\sigma^2}}. \quad E(|Y|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2 \cdot 2\sigma^2}} dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\sigma}} \int_0^{+\infty} ye^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}} dy = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}},$$

$E(a|X_1 - X_2|) = aE(|Y|) = a\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$. 由 $E(\sigma) = \sigma$, 得 $a = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 故选 (A).

二、填空题:11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

(11) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2(2 - x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2(2 - x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}) = x^2 \left[2 - x(\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o(\frac{1}{x^3})) - (1 - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})) \right]$

$$= x^2 \left[\frac{1}{6x^2} + \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2}) \right] = \frac{2}{3}.$$

(12) 已知函数 $f(x, y)$ 满足 $df(x, y) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, $f(1, 1) = \frac{\pi}{4}$, 则

$f(\sqrt{3}, 3) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{\pi}{3}$

【解析】由题意可得 $f'_x(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$, 则

$$f(x, y) = -y \cdot \frac{1}{y} \cdot \arctan \frac{x}{y} + c(y) = -\arctan \frac{x}{y} + c(y),$$

又因为 $f'_y(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, 可得 $c'(y) = c$, 由 $f(1, 1) = \frac{\pi}{4}$ 可得 $c = \frac{\pi}{2}$,

即 $f(x, y) = -\arctan \frac{x}{y} + \frac{\pi}{2}$,

故 $f(\sqrt{3}, 3) = \frac{\pi}{3}$.

(13) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$

【解析】 令 $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, 则 $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $s''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = s(x)$.

即有 $s''(x) - s(x) = 0$, 解得 $s(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

又由 $s(0) = 1, s'(0) = 0$ 有 $C_1 + C_2 = 1, C_1 - C_2 = 0$, 解得 $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$.

故 $s(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$.

(14) 设某公司在 t 时刻的资产为 $f(t)$, 从 0 时刻到 t 时刻的平均资产等于 $\frac{f(t)}{t} - t$. 假设 $f(t)$ 连续且 $f(0) = 0$, 则 $f(t) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $2e^t - 2t - 2$

【解析】 由题意可得方程 $\frac{\int_0^t f(x)dx}{t} = \frac{f(t)}{t} - t$, 即 $\int_0^t f(x)dx = f(t) - t^2$. 两边同时

t 对求导得

$f(t) = f'(t) - 2t$, 即 $f'(t) - f(t) = 2t$. 由一阶线性微分方程通解公式有:

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{\int 1 dt} \left(\int 2te^{-\int 1 dt} dt + C \right) \\ &= e^t \left(\int 2te^{-t} dt + C \right) \\ &= e^t \left[-(2t+2)e^{-t} + C \right] \\ &= Ce^t - 2t - 2. \end{aligned}$$

又由于 $f(0) = 0$, 则 $C - 2 = 0$, 即 $C = 2$. 故 $f(t) = 2e^t - 2t - 2$.

(15) 已知线性方程组 $\begin{cases} ax_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ ax_1 + bx_2 = 2 \end{cases}$ 有解, 其中 a, b 为常数, 若

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 4, \text{ 则 } \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 8

【解析】 由已知 $r(A) = r(A, b) \leq 3 < 4$, 故 $|A, b| = 0$

$$\text{即 } |A, b| = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ a & b & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot 4 = 0,$$

$$\text{故 } \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = 8.$$

(16) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim B(1, p)$, $Y \sim B(2, p)$, $P \in (0, 1)$, 则 $X+Y$ 与 $X-Y$ 的相关系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\frac{1}{3}$

【解析】 因为 $X \sim B(1, p)$, 所以 $DX = p(1-p)$.

因为 $Y \sim B(2, p)$, 所以 $DY = 2p(1-p)$.

$$Cov(X+Y, X-Y) = Cov(X+Y, X) - Cov(X+Y, Y)$$

$$= Cov(X, X) + Cov(Y, X) - Cov(X, Y) - Cov(Y, Y) = DX - DY = p(1-p) - 2p(1-p) = -p(1-p)$$

因为 X 与 Y 相互独立, 所以

$$D(X+Y) = DX + DY = 3p(1-p), D(X-Y) = DX + DY = 3p(1-p)$$

$$\text{故 } \rho = \frac{Cov(X+Y, X-Y)}{\sqrt{D(X+Y)D(X-Y)}} = -\frac{1}{3}$$

三、解答题:17~22 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本题满分 10 分)

已知可导函数 $y = y(x)$ 满足 $ae^x + y^2 + y - \ln(1+x)\cos y + b = 0$, 且 $y(0) = 0, y'(0) = 0$

(I) 求 a, b 的值.

(II) 判断 $x = 0$ 是否为 $y(x)$ 的极值点.

【解析】(1) 在题设方程两边同时对 x 求导得,

$$ae^x + 2y \cdot y' + y' - \frac{\cos y}{1+x} + \ln(1+x) \cdot \sin y \cdot y' = 0 \quad (1)$$

将 $x=0, y=0$ 代入题设方程得, $a+b=0$;

将 $x=0, y=0, y'(0)=0$ 代入①式得, $a-1=0$

综上: $a=1, b=-1$.

(2) 在等式①两边再对 x 求导得,

$$ae^x + 2(y')^2 + 2y \cdot y'' + y'' - \frac{-\sin y \cdot y' \cdot (1+x) - \cos y}{(1+x)^2} + (\ln(1+x) \cdot \sin y \cdot y')' = 0 \quad (2)$$

将 $x=0, y=0, y'(0)=0$ 代入②式得, $y''(0) = -a-1 = -2$.

由于 $y'(0)=0, y''(0)=-2$, 故 $x=0$ 是 $y(x)$ 的极大值点.

(18) (本题满分 12 分)

已知平面区域 $D = \left\{ (x, y) \left| 0 \leq y \leq \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}, x \geq 1 \right. \right\}$

(I) 求 D 的面积.

(II) 求 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

【解析】(1) 面积

$$S = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx \stackrel{x=\tan t}{=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 t}{\tan t \cdot \sec t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc t dt = \ln |\csc t - \cot t| \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln(1+\sqrt{2}).$$

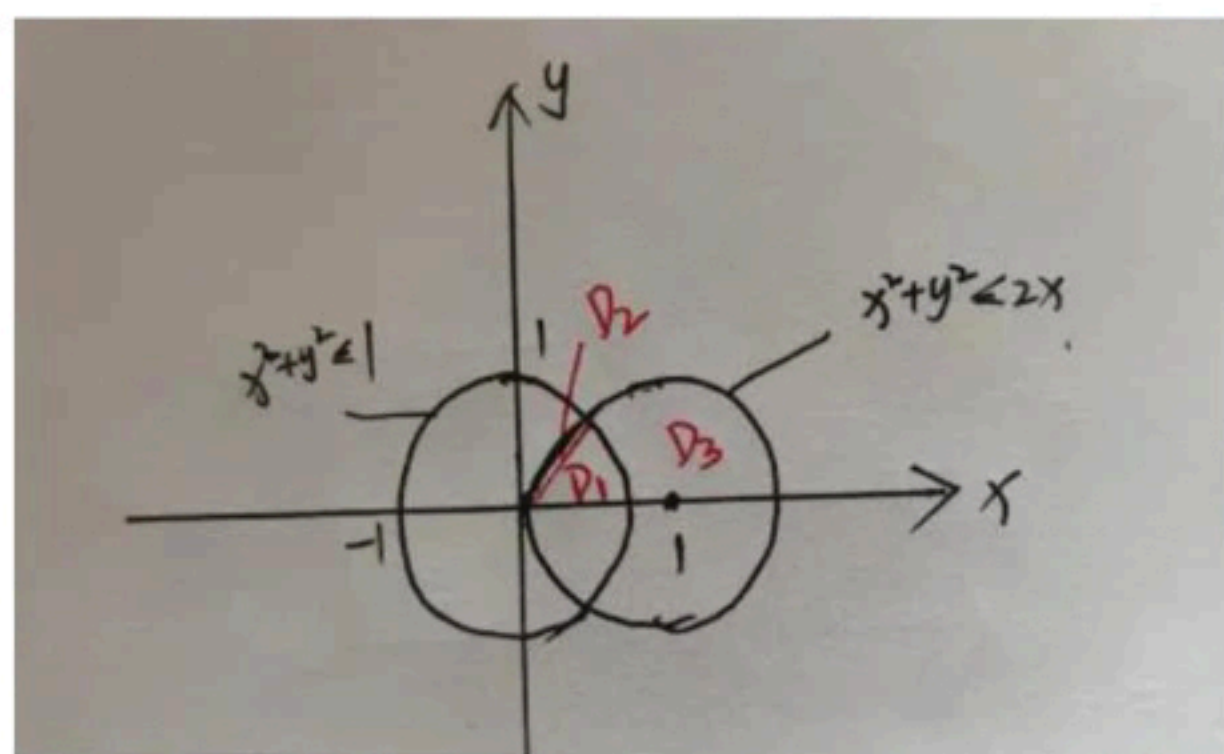
(2) 旋转体体积为

$$V_x = \int_1^{+\infty} \pi y^2 dx = \pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx = \pi \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \pi \left(-\frac{1}{x} - \arctan x \right) \Big|_1^{+\infty} = \pi \left(1 - \frac{\pi}{4} \right).$$

(19) (本题满分 12 分)

已知平面区域 $D = \{ (x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \}$, 计算二重积分 $\iint_D |\sqrt{x^2+y^2}-1| dx dy$.

【解析】本题目先利用奇偶对称性化简, 再切割积分区域, 把积分区域分为三块, 分别采用极坐标进行计算:



$$\begin{aligned} \iint_D |\sqrt{x^2+y^2}-1| d\sigma &= 2 \iint_{D_1+D_2+D_3} |\sqrt{x^2+y^2}-1| d\sigma \\ &= 2 \iint_{D_1} 1-\sqrt{x^2+y^2} d\sigma + 2 \iint_{D_2} 1-\sqrt{x^2+y^2} d\sigma + 2 \iint_{D_3} \sqrt{x^2+y^2}-1 d\sigma \end{aligned}$$

分别采用极坐标进行计算:

$$\iint_{D_1} 1-\sqrt{x^2+y^2} d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^1 r(1-r) dr = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi}{18}$$

$$\iint_{D_2} 1-\sqrt{x^2+y^2} d\sigma = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r(1-r) dr = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta - \frac{8}{3}\cos^3\theta d\theta = \frac{\pi}{6} - \frac{16}{9} + \frac{3}{4}\sqrt{3}$$

$$\iint_{D_3} \sqrt{x^2+y^2}-1 d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_1^{2\cos\theta} r(r-1) dr = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{8}{3}\cos^3\theta - 2\cos^2\theta + \frac{1}{6} d\theta = \frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{18}.$$

所以:

$$\begin{aligned}\iint_D |\sqrt{x^2+y^2}-1| d\sigma &= 2\iint_{D_1} 1-\sqrt{x^2+y^2} d\sigma + 2\iint_{D_2} 1-\sqrt{x^2+y^2} d\sigma + 2\iint_{D_3} \sqrt{x^2+y^2}-1 d\sigma \\ &= -\frac{\pi+32}{9} + 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

(20) (本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上具有 2 阶连续倒数, 证明:

(I) 若 $f(x) = 0$, 则存在 $\xi \in (-a, a)$ 使得 $f''(\xi) = \frac{1}{a^2} [f(a) + f(-a)]$;

(II) 若 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内取得极值, 则存在 $\eta \in (-a, a)$, 使得 $|f''(\eta)| \geq \frac{1}{a^2} |f(a) - f(-a)|$.

【解析】(1) 证明: $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\eta)}{2!}x^2 = f'(0)x + \frac{f''(\eta)}{2!}x^2$, η 介于 0 与 x 之间,

$$\text{则 } f(a) = f'(0)a + \frac{f''(\eta_1)}{2!}a^2, 0 < \eta_1 < a \quad \textcircled{1}$$

$$f(-a) = f'(0)(-a) + \frac{f''(\eta_2)}{2!}a^2, -a < \eta_2 < 0 \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ 得: } f(a) + f(-a) = \frac{a^2}{2} [f''(\eta_1) + f''(\eta_2)] \quad \textcircled{3}$$

又 $f''(x)$ 在 $[\eta_2, \eta_1]$ 上连续, 则必有最大值 M 与最小值 m , 即

$$m \leq f''(\eta_1) \leq M; m \leq f''(\eta_2) \leq M; \text{ 从而 } m \leq \frac{f''(\eta_1) + f''(\eta_2)}{2} \leq M;$$

由介值定理得: 存在 $\xi \in [\eta_2, \eta_1] \subset (-a, a)$, 有 $\frac{f''(\eta_1) + f''(\eta_2)}{2} = f''(\xi)$, 代入 $\textcircled{3}$

得:

$$f(a) + f(-a) = a^2 f''(\xi), \text{ 即 } f''(\xi) = \frac{f(a) + f(-a)}{a^2}$$

(2) 证明: 设 $f(x)$ 在 $x = x_0 \in (-a, a)$ 取极值, 且 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 可导, 则 $f'(x_0) = 0$.

又

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\gamma)}{2!}(x - x_0)^2 = f(x_0) + \frac{f''(\gamma)}{2!}(x - x_0)^2, \gamma \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间},$$

$$\text{则 } f(-a) = f(x_0) + \frac{f''(\gamma_1)}{2!}(-a - x_0)^2, -a < \gamma_1 < 0$$

$$f(a) = f(x_0) + \frac{f''(\gamma_2)}{2!}(a - x_0)^2, 0 < \gamma_2 < a$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } |f(a) - f(-a)| &= \left| \frac{1}{2}(a - x_0)^2 f''(\gamma_2) - \frac{1}{2}(a + x_0)^2 f''(\gamma_1) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} |(a - x_0)^2 f''(\gamma_2)| + \frac{1}{2} |(a + x_0)^2 f''(\gamma_1)| \end{aligned}$$

又 $|f''(x)|$ 连续, 设 $M = \max\{|f''(\gamma_1)|, |f''(\gamma_2)|\}$, 则

$$|f(a) - f(-a)| \leq \frac{1}{2} M (a + x_0)^2 + \frac{1}{2} M (a - x_0)^2 = M (a^2 + x_0^2)$$

又 $x_0 \in (-a, a)$, 则 $|f(a) - f(-a)| \leq M (a^2 + x_0^2) \leq 2Ma^2$, 则

$$M \geq \frac{1}{2a^2} |f(a) - f(-a)|, \text{ 即存在 } \eta = \gamma_1 \text{ 或 } \eta = \gamma_2 \in (-a, a), \text{ 有}$$

$$|f''(\eta)| \geq \frac{1}{2a^2} |f(a) - f(-a)|.$$

(21) (本题满分 12 分)

设矩阵 A 满足对任意 x_1, x_2, x_3 均有 $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$.

(I) 求 A .

(II) 求可逆矩阵 P 与对角矩阵 Λ 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

【解析】(I) 因为 $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 对任意的 x_1, x_2, x_3 均

成立, 所以 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\text{(II)} | \lambda E - A | = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda + 1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \cdot \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda)-2(\lambda+2)=(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda+1)=0.$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=-2, \lambda_2=2, \lambda_3=-1$.

$$\lambda_1=-2 \text{ 时, } \lambda_1 E-A=\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 可得特征向量 } \alpha_1=(0,-1,1)^T;$$

$$\lambda_2=2 \text{ 时, } \lambda_2 E-A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 可得特征向量 } \alpha_2=(4,3,1)^T;$$

$$\lambda_3=-1 \text{ 时, } \lambda_3 E-A=\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 可得特征向量 } \alpha_3=(1,0,-2)^T;$$

$$\text{令 } P=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \text{ 则 } P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(22) (本题满分 12 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}, -\infty < x < +\infty$, 令 $Y=e^x$.

(I) 求 X 的分布函数

(II) 求 Y 的概率密度

(III) Y 的期望是否存在?

【解析】 (I) $F(x)=\int_{-\infty}^x \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = -\frac{1}{1+e^x} \Big|_{-\infty}^x = \frac{e^x}{1+e^x}, x \in R$

(II) **【法 1】** 分布函数法

$$F_Y(y)=P\{Y \leq y\}=P\{e^X \leq y\}.$$

当 $y < 0$ 时, $F_Y(y)=0$;

$$\text{当 } y \geq 0 \text{ 时, } F_Y(y)=P\{X \leq \ln y\}=F(\ln y)=\frac{y}{1+y};$$

所以 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{(1+y)^2}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

【法 2】公式法

因为 $y = e^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调且处处可导, 当 $x \in (-\infty, +\infty)$, $y > 0$, 此时 $x = \ln y$,

所以 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f(\ln y)(\ln y)', & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \frac{e^{\ln y}}{(1+e^{\ln y})^2} \cdot \frac{1}{y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{(1+y)^2}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

$$(III) \quad EY = \int_0^{+\infty} \frac{y}{(1+y)^2} dy = \left(\ln(1+y) + \frac{1}{1+y} \right) \Big|_0^{+\infty} = \infty, \text{ 所以不存在.}$$