

2019 年

数学(三) 参考答案

一、选择题

(1) C

解 $\tan x$ 的麦克劳林展开式为 $x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$,

故 $x - \tan x \sim -\frac{1}{3}x^3$, 则 $k=3$. 故应选 C.

(2) D

解 设 $f(x) = x^5 - 5x + k$, 则 $f'(x) = 5x^4 - 5$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \pm 1$.

当 $x < -1$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $-1 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$.

又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, 结合单调性知, $f(-1) > 0$, $f(1) < 0$ 时才有三个根,

且三个实根分别在区间 $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$ 上,

即 $f(-1) = -1 + 5 + k > 0$, $f(1) = 1 - 5 + k < 0$, 则 $-4 < k < 4$. 故应选 D.

(3) D

解 由微分方程通解形式可知, $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$ 为齐次方程的通解,

$y = e^x$ 为非齐次方程的特解, -1 为特征方程 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ 的二重根,

得 $\begin{cases} 1 - a + b = 0, \\ a^2 - 4b = 0, \end{cases}$ 且 $1 + a + b = c$,

由此解得 $a = 2, b = 1, c = 4$. 故应选 D.

(4) B

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n|}{|nu_n|} = 0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} nu_n$ 绝对收敛, 由比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也绝对收敛.

而当 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_n}{n}$ 条件收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n$ 的敛散性不定.

如果令 $\nu_n = (-1)^n$ 及 $\nu_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_n}{n}$ 都是条件收敛,

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n = (-1)^n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ 收敛, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + \nu_n)$ 的敛散性是不确定的.

则 C、D 都不正确.

再判断 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \nu_n$ 的敛散性: 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n \nu_n|}{|nu_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\nu_n}{n} \right| = 0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} nu_n$ 绝对收敛, 由比较判别法

可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \nu_n$ 是绝对收敛的. 故应选 B.

(5) A

解 由线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系中只有 2 个向量, 则 $2 = 4 - r(A)$, 故 $r(A) = 2$.

由于当 $r(A) < n - 1$ 时 (n 为 A 的阶数), $r(A^*) = 0$. 故应选 A.

(6) C

解 设 λ 是 A 的特征值, 根据 $A^2 + A = 2E$ 得: $\lambda^2 + \lambda = 2$, 解得 $\lambda = 1$ 或 -2 .

由于 $\mathbf{A}$ 是3阶实对称矩阵,则 $\mathbf{A}$ 有3个特征值且 $\mathbf{A}$ 的3个特征值的积为 $|\mathbf{A}|$ 的值,故 $\mathbf{A}$ 的三个特征值的积为1, -2, -2,正惯性指数为1,负惯性指数为2,故二次型 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 的规范形为 $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.故应选C.

(7) C

解 由 $P(A\bar{B}) = P(B\bar{A})$ 得

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(B\bar{A}) = P(B) - P(AB) \Leftrightarrow P(A) = P(B).$$

故应选C.

(8) A

解 由 $X \sim N(\mu, \sigma^2), Y \sim N(\mu, \sigma^2)$,且相互独立,

则 $E(X - Y) = 0, D(X - Y) = DX + DY = 2\sigma^2$,得 $\frac{X - Y}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1)$,

故 $P\{|X - Y| < 1\} = P\left\{\frac{|X - Y|}{\sqrt{2}\sigma} < \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right\} = 2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) - 1$ 与 σ^2 有关,与 μ 无关.

故应选A.

二、填空题

(9) e^{-1}

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \left(-\frac{1}{n+1}\right)\right]^n \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{-1}. \end{aligned}$$

故应填 e^{-1} .

(10) $(\pi, -2)$

解 $y' = \sin x + x \cos x - 2 \sin x = x \cos x - \sin x$,

$$y'' = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x.$$

令 $y'' = 0$,得 $x_1 = 0, x_2 = \pi$,再判断 x_1, x_2 两点的左右两侧二阶导数是否异号;

在 x_1 左侧 $y'' < 0$,右侧 $y'' < 0$,故 $(0, 2)$ 不是拐点;

x_2 左侧 $y'' < 0$, x_2 右侧区间 $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ 内 $y'' > 0$,所以拐点为 $(\pi, -2)$.

故应填 $(\pi, -2)$.

(11) $\frac{1}{18}(1 - 2\sqrt{2})$

解 由分部积分法: $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 f(x) dx^3 = \frac{1}{3} x^3 f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 f'(x) dx$, ①

又 $f(1) = \int_1^1 \sqrt{1+t^4} dt = 0, f'(x) = \sqrt{1+x^4}$,代入①式:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} f(1) - \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^4} dx &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx^4 \\ &= -\frac{1}{12} \cdot \frac{2}{3} (1+x^4)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{18} (1 - 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

故应填 $\frac{1}{18}(1-2\sqrt{2})$.

(12) 0.4

解 当 $P_B = 20$ 时, $Q_A = 500 - P_A^2 - 20P_A + 2 \cdot 20^2 = 1300 - 20P_A - P_A^2$,

$$\text{则 } \eta_{AA} = -\frac{P_A}{Q_A} \frac{dQ_A}{dP_A} = -\frac{P_A}{1300 - 20P_A - P_A^2} \cdot (-20 - 2P_A) = \frac{2P_A(P_A + 10)}{1300 - 20P_A - P_A^2},$$

所以 $\eta_{AA} \Big|_{P_A=10} = 0.4$. 故应填 0.4.

(13) 1

解 由题意得

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & a^2 - 1 & \vdots & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & a^2 - 1 & \vdots & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 1 & \vdots & a - 1 \end{pmatrix}.$$

要使 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有无穷多解, 则应使 $r(\mathbf{A}) = r(\bar{\mathbf{A}}) < 3$,

当 $a^2 - 1 = a - 1 = 0$, 即 $a = 1$ 时, $r(\mathbf{A}) = r(\bar{\mathbf{A}}) = 2 < 3$.

故应填 1.

(14) $\frac{2}{3}$

解 由随机变量 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 可知 X 的分布函数

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{4}, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2, \end{cases} EX = \int_0^2 x f(x) dx = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx = \frac{4}{3},$$

$$\begin{aligned} P\{F(X) > EX - 1\} &= P\left\{F(X) > \frac{4}{3} - 1\right\} = P\left\{\frac{X^2}{4} > \frac{1}{3}\right\} \\ &= P\left\{X > \frac{2}{\sqrt{3}}\right\} = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{x}{2} dx = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

故应填 $\frac{2}{3}$.

三、解答题

(15) 解 当 $x > 0$ 时, $f'(x) = 2x^{2x}(\ln x + 1)$; 当 $x < 0$ 时, $f'(x) = e^x(x + 1)$.

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x \ln x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \ln x}{x} = -\infty$, 所以 $f'(0)$ 不存在.

$$\text{综上 } f'(x) = \begin{cases} 2x^{2x}(\ln x + 1), & x > 0, \\ e^x(x + 1), & x < 0. \end{cases}$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = -1, x = \frac{1}{e}$.

当 $x < -1$ 或 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $-1 < x < 0$ 或 $x > \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -1)$ 和 $(0, \frac{1}{e})$ 内单调减少,

在区间 $(-1, 0)$ 和 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 内单调增加, 从而 $f(x)$ 的极小值为

$$f(-1) = 1 - \frac{1}{e}, f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{2}{e}}, \text{极大值为 } f(0) = 1.$$

(16) 解 因为

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y - f_u(x+y, x-y) - f_v(x+y, x-y),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = x - f_u(x+y, x-y) + f_v(x+y, x-y),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -f_{uu}(x+y, x-y) - 2f_{uv}(x+y, x-y) - f_{vv}(x+y, x-y),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 1 - f_{uu}(x+y, x-y) + f_{vv}(x+y, x-y),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -f_{uu}(x+y, x-y) + 2f_{uv}(x+y, x-y) - f_{vv}(x+y, x-y),$$

所以

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1 - 3f_{uu}(x+y, x-y) - f_{vv}(x+y, x-y).$$

(17) 解 (I) 由一阶线性微分方程的通解公式, 得

$$y(x) = e^{\int x dx} \left(C + \int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\frac{x^2}{2}} e^{-\int x dx} dx \right) = e^{\frac{x^2}{2}} (\sqrt{x} + C).$$

因为 $y(1) = \sqrt{e}$, 所以 $C = 0$.

$$\text{从而 } y(x) = \sqrt{x} e^{\frac{x^2}{2}}.$$

(II) D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积为

$$V = \int_1^2 \pi y^2(x) dx = \int_1^2 \pi x e^{x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{x^2} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} (e^4 - e).$$

(18) 解 由题意, 所求面积为

$$S = \int_0^{+\infty} e^{-x} |\sin x| dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx,$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx &= -e^{-x} \cos x \Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi} - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \cos x dx \\ &= (-1)^n [e^{-(n+1)\pi} + e^{-n\pi}] - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx. \end{aligned}$$

$$\text{得 } \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx = \frac{(-1)^n}{2} [e^{-(n+1)\pi} + e^{-n\pi}]$$

$$\text{所以 } S = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [e^{-n\pi} + e^{-(n+1)\pi}] = \frac{e^{\pi} + 1}{2(e^{\pi} - 1)}.$$

(19) 解 (I) $a_{n+1} - a_n = \int_0^1 x^n (x-1) \sqrt{1-x^2} dx.$

因为在积分区间 $[0, 1]$ 上, $x^n (x-1) \sqrt{1-x^2} \leq 0$ 且不恒等于 0,

所以 $a_{n+1} - a_n < 0$, 即 $\{a_n\}$ 单调减少.

$$\begin{aligned} \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, 因为 } a_n &= \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{3} x^{n-1} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 + \frac{n-1}{3} \int_0^1 x^{n-2} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{n-1}{3} \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1-x^2} dx - \frac{n-1}{3} \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \frac{n-1}{3} a_{n-2} - \frac{n-1}{3} a_n, \end{aligned}$$

所以 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n=2, 3, \dots).$

(II) $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+2} \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}.$

因为 $\{a_n\}$ 单调减少且 $a_n > 0$, 所以 $\frac{n-1}{n+2} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1.$

(20) 解 由等价的定义可知:

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则有 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3),$

对 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 作初等行变换可得:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & a^2+3 & \vdots & a+3 & 1-a & a^2+3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-1 & \vdots & a-1 & 1-a & a^2-1 \end{pmatrix}$$

当 $a = -1$ 时, 有 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) < r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3);$

当 $a = 1$ 时, 有 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = 2;$

可知 $a \neq 1$ 且 $a \neq -1$ 时, 此时 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = 3,$

则有 $a = 1$ 或者 $a \neq 1$ 且 $a \neq -1$ 时, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示,

此时, 要保证 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示.

对 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 作初等行变换可得:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 2 \\ a+3 & 1-a & a^2+3 & \vdots & 4 & 4 & a^2+3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-1 & \vdots & 1-a & \frac{3}{2}(1-a) & \frac{2a^2-a-1}{2} \end{pmatrix}$$

当 $a = 1$ 时, 有 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = r(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2,$

可知当 $a \neq 1$ 且 $a \neq -1$ 时, 此时 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = r(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3,$

此时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示.

综上所述:当 $a \neq -1$ 时,向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可相互线性表示.

$$\text{当 } a \neq 1 \text{ 时, } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & a^2-1 & \vdots & a^2-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

则 $\beta_3 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$.

$$\text{当 } a = 1 \text{ 时, } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

基础解系为 $k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} (k \in \mathbf{R})$, 则 $\beta_3 = (3-2k)\alpha_1 + (k-2)\alpha_2 + k\alpha_3$.

(21) 解 (I) 因为矩阵 A 与 B 相似, 所以 $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$, $|A| = |B|$,

$$\text{即 } \begin{cases} x-4=y+1, \\ 4x-8=-2y, \end{cases} \text{ 解得 } x=3, y=-2.$$

(II) 矩阵 B 的特征多项式为 $|\lambda E - B| = (\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda + 2)$,

所以 B 的特征值为 $2, -1, -2$.

由于 A 与 B 相似, 所以 A 的特征值也为 $2, -1, -2$.

A 的属于特征值 2 的特征向量为 $\xi_1 = (1, -2, 0)^T$;

A 的属于特征值 -1 的特征向量为 $\xi_2 = (-2, 1, 0)^T$;

A 的属于特征值 -2 的特征向量为 $\xi_3 = (1, -2, -4)^T$.

$$\text{记 } P_1 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \text{ 于是 } P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

B 的属于特征值 2 的特征向量为 $\eta_1 = (1, 0, 0)^T$;

B 的属于特征值 -1 的特征向量为 $\eta_2 = (1, -3, 0)^T$;

B 的属于特征值 -2 的特征向量为 $\eta_3 = (0, 0, 1)^T$.

$$\text{记 } P_2 = (\eta_1, \eta_2, \eta_3), \text{ 于是 } P_2^{-1}BP_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

由 $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}BP_2$, 得 $(P_1P_2^{-1})^{-1}A(P_1P_2^{-1}) = B$.

$$\text{令 } P = P_1P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

则 $P^{-1}AP = B$.

(22) 解 (I) Z 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{XY \leq z \mid Y = -1\}P\{Y = -1\} + P\{XY \leq z \mid Y = 1\}P\{Y = 1\} \\ &= pP\{-X \leq z\} + (1-p)P\{X \leq z\}. \end{aligned}$$

当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = pP\{X \geq -z\} + (1-p) \cdot 0 = pe^z$;

当 $z \geq 0$ 时, $F_Z(z) = p \cdot 1 + (1-p)P\{X \leq z\} = 1 - (1-p)e^{-z}$.

所以 Z 的概率密度为 $f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} pe^z, & z < 0, \\ (1-p)e^{-z}, & z \geq 0. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad \text{Cov}(X, Z) &= E(XZ) - EX \cdot EZ \\ &= E(X^2Y) - EX \cdot E(XY) \\ &= E(X^2) \cdot E(Y) - (EX)^2 \cdot E(Y) \\ &= DX \cdot EY = 1 - 2p, \end{aligned}$$

令 $\text{Cov}(X, Z) = 0$, 得 $p = \frac{1}{2}$. 所以 $p = \frac{1}{2}$ 时, X 与 Z 不相关.

(III) 因为

$$P\{X \leq 1, Z \leq -1\} = P\{X \leq 1, XY \leq -1\} = 0,$$

$$P\{X \leq 1\} > 0, P\{Z \leq -1\} > 0,$$

所以

$$P\{X \leq 1, Z \leq -1\} \neq P\{X \leq 1\}P\{Z \leq -1\}.$$

故 X 与 Z 不相互独立.

(23) 解 (I) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x; \sigma^2) dx = 1$, 得

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = A \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= A \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} A, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

(II) 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的观测值, 则似然函数为

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \sigma^2) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}, & x_1, x_2, \dots, x_n \geq \mu, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\sigma^2) = \frac{n}{2} \ln \frac{2}{\pi} - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2.$$

$$\frac{d \ln L(\sigma^2)}{d\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2,$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\sigma^2)}{d\sigma^2} = 0, \text{ 得 } \sigma^2 \text{ 的最大似然估计值为 } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2,$$

$$\text{所以 } \sigma^2 \text{ 的最大似然估计量为 } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2.$$