

2018年

数学(三) 参考答案

一、选择题

(1) D

解 对于 D 选项 $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$,

$$\text{由 } f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{|x|} - 1}{x} = \frac{-\frac{1}{2}x}{x} = -\frac{1}{2},$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos \sqrt{|x|} - 1}{x} = \frac{\frac{1}{2}x}{x} = \frac{1}{2},$$

可得 $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导. 故应选 D.

(2) D

解 当 $f(x) = x - \frac{1}{2}$, 满足 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 而 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 排除 A, C.

当 $f(x) = \sqrt{x} - \frac{2}{3}$, 满足 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 且 $f''(x) < 0$, 而 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}$, 显然大于 0, 排除 B. 故应选 D.

(3) C

解 利用对称性可计算 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{2x}{1+x^2}\right) dx = \pi$.

易得, $K > \pi$, $N < \pi$. 所以 $K > M > N$. 故应选 C.

(4) D

解 平均成本为 $\frac{C(Q)}{Q}$, 求平均成本最小值, 即 $\left(\frac{C(Q)}{Q}\right)' = 0$, 则 $\frac{C'(Q)Q - C(Q)}{Q^2} = 0$, 得 $Q_0 C'(Q_0) = C(Q_0)$. 故应选 D.

(5) A

解 易知题中矩阵的特征值均为 3 重特征值 1, 若矩阵相似, 则特征值对应的 $\lambda E - A$,

即 $E - A$ 秩必然相等, 显然 $E - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩为 2.

故应选 A.

(6) A

解 对于 B 选项, 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $r(A \quad BA) = 2 \neq r(A)$, 排除 B.

对于 C 选项, 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $r(A \quad B) = 2 \neq \max\{r(A), r(B)\}$, 排除 C.

对于 D 选项, 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $r(A \quad B) = 2 \neq r(A^T \quad B^T)$, 排除 D.

故应选 A.

(7) A

解 由 $f(1+x) = f(1-x)$ 可知, $f(x)$ 关于 $x = 1$ 对称, 所以 $\int_{-\infty}^1 f(x) dx = \int_1^{+\infty} f(x) dx = 0.5$.

又已知, $\int_0^2 f(x) dx = 0.6$, 则 $\int_0^1 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx = 0.3$.

所以, $P\{X < 0\} = \int_{-\infty}^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^1 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = 0.2$.

故应选 A.

(8) B

解 由 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 得 $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$. 所以 $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

而 $\frac{S^2(n-1)}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$. 因此 $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1)$. 故应选 B.

二、填空题

(9) $y = 4x - 3$

解 $y' = 2x + \frac{2}{x}$, $y'' = 2 - \frac{2}{x^2}$, 由此得拐点坐标为 $(1, 1)$, 曲线在拐点处斜率为 $y'(1) = 4$,

切线方程为 $y = 4x - 3$. 故应填 $y = 4x - 3$.

(10) $e^x \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}} - \sqrt{1 - e^{2x}} + C$

解 令 $\arcsin \sqrt{1 - e^{2x}} = t$, 则 $x = \ln |\cos t|$. 代入原式得 $-\int t \cos t \frac{\sin t}{\cos t} dt = -\int t \sin t dt =$
 $t \cos t - \int \cos t dt = t \cos t - \sin t + C$, 将 $t = \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}}$ 代入得 $\int e^x \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}} dx =$
 $e^x \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}} - \sqrt{1 - e^{2x}} + C$

故应填 $e^x \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}} - \sqrt{1 - e^{2x}} + C$.

(11) $C2^x - 5$

解 根据二阶差分的定义可得 $\Delta^2 y_x = \Delta y_{x+1} - \Delta y_x = (y_{x+2} - y_{x+1}) - (y_{x+1} - y_x) =$
 $y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x$. 则原式化为 $y_{x+2} - 2y_{x+1} = 5$. 差分方程特征方程 $\lambda - 2 = 0$, 得齐次方程通
解为 $y = C2^x$, 由于 1 不是特征根, 于是设特解为 $y_x = A$, 代入可得 $A = -5$, 于是原方程的
通解为 $y_x = C2^x - 5$. 故应填 $C2^x - 5$.

(12) $2e$

解 移项得 $f(x + \Delta x) - f(x) - 2xf(x)\Delta x = o(\Delta x) (\Delta x \rightarrow 0)$, 方程两边同除以 Δx 可
得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - 2xf(x) = 0$. 得 $f'(x) = 2xf(x) (\Delta x \rightarrow 0)$. 解得 $f(x) = Ce^{x^2}$

由 $f(0) = 2$ 得 $C = 2$, 所以 $f(1) = 2e$. 故应填 $2e$.

(13) 2

解 由题意得 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关,

则 $|(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| \neq 0$. 则 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$. 故应填 2.

(14) $\frac{1}{3}$

解 $P(AC | A \cup B) = \frac{P(AC \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(AC \cup ABC)}{P(A) + P(B) - P(AB)} = \frac{P(AC)}{P(A) + P(B) - P(AB)} = \frac{1}{3}$. 故应填 $\frac{1}{3}$.

三、解答题

(15) 解 令 $t = \frac{1}{x}$, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(ax + b)e^{\frac{1}{x}} - x] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(a + bt)e^t - 1}{t}.$$

由题设及 $\lim_{t \rightarrow 0^+} [(a + bt)e^t - 1] = a - 1$ 可得 $a - 1 = 0$, 即 $a = 1$.

又因为

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(a + bt)e^t - 1}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1 + bt)e^t - 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} (be^t + \frac{e^t - 1}{t}) \\ &= b + 1, \end{aligned}$$

从而由题设得 $b = 1$.

$$\begin{aligned} (16) \text{ 解 } \iint_D x^2 dx dy &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{3(1-x^2)}} x^2 dy \\ &= \sqrt{3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2 (\sqrt{1-x^2} - x) dx \\ &= \sqrt{3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2 \sqrt{1-x^2} dx - \sqrt{3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^3 dx. \end{aligned}$$

令 $x = \sin t$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 4t) dt \\ &= \frac{\pi}{32}, \end{aligned}$$

$$\text{又 } \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^3 dx = \frac{1}{16},$$

$$\text{所以} \iint_D x^2 dx dy = \frac{\sqrt{3}}{16} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right).$$

(17) 解 设圆的半径为 x , 正方形与正三角形的边长分别为 y 和 z , 则问题化为: 函数

$f(x, y, z) = \pi x^2 + y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} z^2$ 在条件 $2\pi x + 4y + 3z = 2 (x > 0, y > 0, z > 0)$ 下是否存在最小值.

令 $L(x, y, z, \lambda) = \pi x^2 + y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} z^2 + \lambda(2\pi x + 4y + 3z - 2)$, 考虑方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2\pi x + 2\pi\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 4\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\sqrt{3}}{2} z + 3\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2\pi x + 4y + 3z - 2 = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } x_0 = \frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}, \quad y_0 = \frac{2}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}, \quad z_0 = \frac{2\sqrt{3}}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}.$$

$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}.$$

又当 $2\pi x + 4y + 3z = 2$ 且 $xyz = 0$ 时, $f(x, y, z)$ 的最小值为

$$f\left(0, \frac{2}{4 + 3\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{3}}{4 + 3\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{4 + 3\sqrt{3}},$$

所以三个图形的面积之和存在最小值, 最小值为

$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \text{ (单位: } \text{m}^2 \text{)}.$$

(18) 解 因为

$$\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{(2n)!}, x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \left(-\frac{1}{1+x} \right)'$$

$$= - \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \right)'$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1}$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) x^n, -1 < x < 1,$$

$$\text{所以 } \cos 2x - \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) x^n, -1 < x < 1.$$

由题设知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) x^n \quad (-1 < x < 1)$.

$$\text{故} \begin{cases} a_{2n} = \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!} - 2n - 1, & (n=0, 1, 2, \dots) \\ a_{2n+1} = 2n + 2, \end{cases}$$

(19) 解 由于 $x_1 \neq 0$, 所以 $e^{x_2} = \frac{e^{x_1} - 1}{x_1}$.

根据微分中值定理, 存在 $\xi \in (0, x_1)$, 使得 $\frac{e^{x_1} - 1}{x_1} = e^\xi$.

所以 $e^{x_2} = e^\xi$, 故 $0 < x_2 < x_1$.

假设 $0 < x_{n+1} < x_n$, 则

$$e^{x_{n+2}} = \frac{e^{x_{n+1}} - 1}{x_{n+1}} = e^\eta \quad (0 < \eta < x_{n+1}),$$

所以 $0 < x_{n+2} < x_{n+1}$.

故 $\{x_n\}$ 是单调减少的数列, 且下有界, 从而 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 得 $ae^a = e^a - 1$. 易知 $a=0$ 为其解.

令 $f(x) = xe^x - e^x + 1$, 则 $f'(x) = xe^x$.

当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加, 所以 $a=0$ 是方程 $ae^a = e^a - 1$ 在 $[0, +\infty)$ 上的唯一的解, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

(20) 解 (I) $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 当且仅当

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + ax_3 = 0, \end{cases}$$

对方程组的系数矩阵施以初等变换得

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

当 $a \neq 2$ 时, 方程组只有零解, 故 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解为 $x = 0$,

当 $a = 2$ 时, 方程组有无穷多解, 通解为 $x = k \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, k 为任意常数,

故 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解是 $x = k \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, k 为任意常数.

(II) 由(I)知, 当 $a \neq 2$ 时, $f(x_1, x_2, x_3)$ 正定, $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

当 $a = 2$ 时,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 \\ &= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}(x_2 + x_3)^2, \end{aligned}$$

所以 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$.

(21) 解 (I) 对矩阵 A, B 分别施以初等行变换得

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3a \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}.$$

由题设知 $a=2$.

(II) 由 (I) 知 $a=2$, 对矩阵 $(A \mid B)$ 施以初等行变换得

$$(A \mid B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

记 $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 由于

$$A \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, A \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \beta_1, A \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \beta_2, A \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \beta_3,$$

故 $AX=B$ 的解为

$$X = \begin{pmatrix} 3-6k_1 & 4-6k_2 & 4-6k_3 \\ -1+2k_1 & -1+2k_2 & -1+2k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } k_1, k_2, k_3 \text{ 为任意常数.}$$

由于 $|X| = k_3 - k_2$, 所以满足 $AP=B$ 的可逆矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 3-6k_1 & 4-6k_2 & 4-6k_3 \\ -1+2k_1 & -1+2k_2 & -1+2k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } k_2 \neq k_3.$$

(22) 解 (I) 由题设可得

$$EX = (-1) \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

$$E(XZ) = E(X^2Y) = EX^2 \cdot EY = \lambda.$$

$$\text{所以 } \text{Cov}(X, Z) = E(XZ) - EX \cdot EZ = \lambda.$$

(II) Z 的所有可能取值为全体整数值, 且

$$P\{Z=0\} = P\{Y=0\} = e^{-\lambda};$$

对于 $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, 有

$$\begin{aligned} P\{Z=n\} &= P\{XY=n\} \\ &= P\left\{X = \frac{n}{|n|}, Y = |n|\right\} \\ &= P\left\{X = \frac{n}{|n|}\right\} P\{Y = |n|\} \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{|n|}}{2 \cdot |n|!}. \end{aligned}$$

(23) 解 (I) 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为样本观测值, 似然函数为

$$L(\sigma) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \sigma) = \frac{1}{2^n \sigma^n} e^{-\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n |x_i|},$$

$$\text{则 } \ln L(\sigma) = -n \ln 2 - n \ln \sigma - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\sigma)}{d\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n |x_i| = 0, \text{ 解得}$$

$$\sigma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

$$\text{所以 } \hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|.$$

$$(II) \text{ 由于 } E|X| = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x; \sigma) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}} dx = \frac{1}{\sigma} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x}{\sigma}} dx = \sigma, \text{ 所以}$$

$$E\hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E|X_i| = E|X| = \sigma,$$

又因为

$$E|X|^2 = EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x; \sigma) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}} dx = \frac{1}{\sigma} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x}{\sigma}} dx = 2\sigma^2,$$

$$D(|X|) = E(|X|^2) - (E|X|)^2 = \sigma^2,$$

所以

$$D\hat{\sigma} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(|X_i|) = \frac{D(|X|)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}.$$