

2017年(数一)真题答案解析

一、选择题

(1) A

解 由 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0, \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 得 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = b$.

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2ax} = \frac{1}{2a} = b.$$

所以 $ab = \frac{1}{2}$. 故应选 A.

(2) C

解 由 $f(x)f'(x) > 0$, 可得 $2f(x)f'(x) > 0$, 即 $[f^2(x)]' > 0$.

因此 $f^2(x)$ 严格单增, 故有 $|f(x)|$ 严格单增, 所以有 $|f(1)| > |f(-1)|$.

故应选 C.

(3) D

解 向量 $\mathbf{n} = (1, 2, 2)$ 的方向余弦为:

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}, \cos \beta = \frac{2}{3}, \cos \gamma = \frac{2}{3}.$$

函数 $f(x, y, z) = x^2y + z^2$ 在点 $(1, 2, 0)$ 处的三个偏导数为:

$$f'_x(1, 2, 0) = 4, f'_y(1, 2, 0) = 1, f'_z(1, 2, 0) = 0.$$

所以函数 $f(x, y, z) = x^2y + z^2$ 在点 $(1, 2, 0)$ 处沿向量 $\mathbf{n}$ 的方向导数为:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right|_{(1, 2, 0)} &= f'_x(1, 2, 0) \cos \alpha + f'_y(1, 2, 0) \cos \beta + f'_z(1, 2, 0) \cos \gamma \\ &= 4 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} = 2. \end{aligned}$$

故应选 D.

(4) C

解 令 $s_1(t), s_2(t)$ 表示甲、乙两人的路程, 由题意, 计时开始时, 甲在乙前方 10m, 要想在 t_0 时刻乙追上甲, 应有 $s_1(t_0) - s_2(t_0) = -10$. 根据题中图中阴影部分面积数值为 10, 20, 3, 可得

$$t = 10 \text{ 时}, s_1(t) - s_2(t) = \int_0^{10} [v_1(t) - v_2(t)] dt = 10.$$

$$\begin{aligned} 15 < t < 20 \text{ 时}, s_1(t) - s_2(t) &= \int_0^t [v_1(t) - v_2(t)] dt = 10 + \int_{10}^t [v_1(t) - v_2(t)] dt \\ &> 10 + \int_{10}^{25} [v_1(t) - v_2(t)] dt = 10 - 20 = -10. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t = 25 \text{ 时}, s_1(t) - s_2(t) &= \int_0^{25} [v_1(t) - v_2(t)] dt \\ &= \int_0^{10} [v_1(t) - v_2(t)] dt + \int_{10}^{25} [v_1(t) - v_2(t)] dt \\ &= 10 - 20 = -10. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t > 25 \text{ 时, } s_1(t) - s_2(t) &= \int_0^t [v_1(t) - v_2(t)] dt \\
 &= \int_0^{25} [v_1(t) - v_2(t)] dt + \int_{25}^t [v_1(t) - v_2(t)] dt \\
 &= -10 + \int_{25}^t [v_1(t) - v_2(t)] dt > -10.
 \end{aligned}$$

故应选 C.

(5) A

解 因为 α 为 3 维单位列向量, 故 $\alpha^T \alpha = 1 = \text{tr}(\alpha \alpha^T)$.

所以, $A = \alpha \alpha^T$ 的特征值为 1, 0, 0. 所以, $|E - \alpha \alpha^T| = 0$, 即矩阵 $E - \alpha \alpha^T$ 不可逆.

故应选 A.

(6) B

解 因为 A 和 B 都是上三角矩阵, 所以特征值都是 1, 2, 2.

所以, 要判别 A 和 B 能否相似对角化, 只需考察属于 2 的线性无关的特征向量的个数即可.

对于 A , 属于 2 的线性无关的特征向量的个数 $3 - r(2E - A) = 3 - 1 = 2$.

对于 B , 属于 2 的线性无关的特征向量的个数 $3 - r(2E - B) = 3 - 2 = 1$.

所以, A 可以和 C 相似, 但是 B 不能.

故应选 B.

(7) A

解 因为 $P(A|B) > P(A|\bar{B})$,

$$\text{所以 } \frac{P(AB)}{P(B)} > \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)},$$

则 $P(AB) > P(A)P(B)$.

$$\text{而 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} > \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B),$$

$$P(B|\bar{A}) = \frac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)} < \frac{P(B) - P(A)P(B)}{1 - P(A)} = \frac{P(B)[1 - P(A)]}{1 - P(A)} = P(B).$$

故 $P(B|A) > P(B|\bar{A})$. 故应选 A.

(8) B

解 因为 $X_i \sim N(\mu, 1)$,

所以 $X_i - \mu \sim N(0, 1)$,

则 $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$, 故 A 正确;

$$\text{因为 } \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{1} \sim \chi^2(n-1), \text{ 故 C 正确;}$$

$$\text{因为 } \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{n}\right),$$

$$\text{所以 } \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1),$$

则 $n(\bar{X} - \mu)^2 \sim \chi^2(1)$, 故 D 正确.

对于 B 选项: $X_n - X_1 \sim N(0, 2)$,

则 $\frac{X_n - X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1)$, 所以 $\left(\frac{X_n - X_1}{2}\right)^2 \sim \chi^2(1)$. 从而 B 错误.

故应选 B.

二、填空题

(9) 0

解 根据 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 的幂级数展开式求解.

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, (|x| < 1).$$

$$\text{故有 } f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} n!, & n \text{ 为偶数,} \\ 0, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

所以 $f^{(3)}(0) = 0$. 故应填 0.

(10) $e^{-x}(C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x)$

解 微分方程的特征方程为

$$\gamma^2 + 2\gamma + 3 = 0.$$

特征根为 $\gamma_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}i$.

因此, 原方程的通解为 $e^{-x}(C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x)$.

故应填 $e^{-x}(C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x)$.

(11) -1

$$\text{解 令 } P(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2 - 1}, \quad Q(x, y) = \frac{-ay}{x^2 + y^2 - 1},$$

则曲线积分 $\int_L P dx + Q dy$ 在区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ 内与路径无关的条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$$\text{而 } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2 - 1)^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2axy}{(x^2 + y^2 - 1)^2}, \text{ 故 } a = -1.$$

故应填 -1.

(12) $\frac{1}{(1+x)^2}$

$$\text{解 令 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1}, x \in (-1, 1).$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \int_0^x S(x) dx &= \int_0^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1} \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^x n x^{n-1} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n = \frac{x}{1+x}. \end{aligned}$$

$$\text{所以, } S(x) = \left(\frac{x}{1+x} \right)' = \frac{1}{(1+x)^2}, x \in (-1, 1).$$

故应填 $\frac{1}{(1+x)^2}$.

(13) 2

解 $(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 故矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 可逆, 所以 $r(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = r(A)$, 易知 $r(A) = 2$. 故应填 2.

(14) 2

解 X 的概率密度

$$f(x) = F'(x) = 0.5\varphi(x) + 0.25\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{则 } EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= 0.5 \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx + 0.25 \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right)dx \\ &= 0 + 0.5 \int_{-\infty}^{+\infty} (2t+4)\varphi(t)dt \\ &= 0.5 \left[2 \int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)dt + 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt \right] \\ &= 2. \end{aligned}$$

三、解答题

(15) 解 因为 $y = f(e^x, \cos x)$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} e^x - \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \sin x, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} e^x + \left(\frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial u^2} e^x - \frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial u \partial v} \sin x \right) e^x \\ &\quad - \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \cos x - \left(\frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial u \partial v} e^x - \frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial v^2} \sin x \right) \sin x. \end{aligned}$$

当 $x=0$ 时, $u=e^0=1, v=\cos 0=1$, 所以

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} &= \frac{\partial f(1, 1)}{\partial u}, \\ \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} &= \frac{\partial f(1, 1)}{\partial u} + \frac{\partial^2 f(1, 1)}{\partial u^2} - \frac{\partial f(1, 1)}{\partial v}. \end{aligned}$$

(16) 解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 x \ln(1+x) dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln(1+x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} (x-1)^2 \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \ln(1+x) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(17) 解 由 $x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$, 得

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3 + 3y' = 0, \quad (1)$$

$$6x + 6y(y')^2 + 3y^2 y'' + 3y'' = 0. \quad (2)$$

在①式中令 $y' = 0$ 得 $x = -1, x = 1$.

当 x 分别取 -1 和 1 时, 由 $x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$ 得 $y(-1) = 0, y(1) = 1$.

将 $x = -1, y(-1) = 0$ 及 $y'(-1) = 0$ 代入②式得 $y''(-1) = 2$.

因为 $y'(-1) = 0, y''(-1) > 0$, 所以 $y(-1) = 0$ 是 $y(x)$ 的极小值.

将 $x = 1, y(1) = 1$ 及 $y'(1) = 0$ 代入②式得 $y''(1) = -1$.

因为 $y'(1) = 0, y''(1) < 0$, 所以 $y(1) = 1$ 是 $y(x)$ 的极大值.

(18) 解 (I) 由题设知 $f(x)$ 连续且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 所以 $f(0) = 0$.

由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$ 与极限的保号性可知, 存在 $a \in (0, 1)$ 使得 $\frac{f(a)}{a} < 0$, 即 $f(a) < 0$.

又 $f(1) > 0$, 所以存在 $b \in (a, 1) \subset (0, 1)$, 使得 $f(b) = 0$, 即方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在一个实根.

(II) 由 (I) 知 $f(0) = f(b) = 0$, 根据罗尔定理, 存在 $c \in (0, b) \subset (0, 1)$, 使得

$$f'(c) = 0.$$

令 $F(x) = f(x)f'(x)$, 由题设知 $F(x)$ 在区间 $[0, b]$ 上可导, 且

$$F(0) = 0, F(c) = 0, F(b) = 0.$$

根据罗尔定理, 存在 $\xi \in (0, c), \eta \in (c, b)$, 使得 $F'(\xi) = F'(\eta) = 0$,

即 ξ, η 是方程 $f(x)f''(x) + (f'(x))^2 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内的两个不同实根.

(19) 解 (I) 圆锥面与柱面的交线 C 的方程为 $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z^2 = 2x \end{cases}$, 消去 z 得 C 到 xOy 平面的投影

柱面为 $x^2 + y^2 = 2x$, 故所求投影曲线的方程为 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ z = 0 \end{cases}$.

(II) 因为 S 的密度为 $\mu(x, y, z) = 9\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 所以 S 的质量为

$$M = \iiint_S 9\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dS.$$

又 S 在 xOy 面上的投影区域为 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}$, 所以

$$M = 9 \iint_D \sqrt{2(x^2 + y^2)} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} dx dy$$

$$= 18 \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

$$= 18 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r \cdot r dr$$

$$= 48 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta$$

$$= 64.$$

(20) 解 (I) 由 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, 知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 故 $r(A) \leq 2$.

又因为 $\mathbf{A}$ 有 3 个不同的特征值, 所以 $\mathbf{A}$ 至少有 2 个不为零的特征值, 从而 $r(\mathbf{A}) \geq 2$.
故 $r(\mathbf{A}) = 2$.

(II) 由 $\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = \mathbf{0}$, 知 $\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$, 故 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 为方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一个解.

又 $r(\mathbf{A}) = 2$, 所以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 为 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系.

因为 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 所以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \beta$ 的一个特解.

故 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \beta$ 的通解为 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, 其中 k 为任意常数.

(21) 解 二次型 f 的矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

由题设知 $|\mathbf{A}| = 0$, 又 $|\mathbf{A}| = 6 - 3a$, 于是 $a = 2$.

矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征多项式为 $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \lambda(\lambda + 3)(\lambda - 6)$, 所以特征值为 $-3, 6, 0$.

不妨设 $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 0$.

矩阵 $\mathbf{A}$ 属于特征值 $\lambda_1 = -3$ 的单位特征向量为 $\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T$;

属于特征值 $\lambda_2 = 6$ 的单位特征向量为 $\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T$;

属于特征值 $\lambda_3 = 0$ 的单位特征向量为 $\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$.

故所求的一个正交矩阵为 $\mathbf{Q} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

(22) 解 (I) $EY = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)dy = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}$,

$$P\{Y \leq EY\} = P\{Y \leq \frac{2}{3}\} = \int_0^{\frac{2}{3}} 2y dy = \frac{4}{9}.$$

(II) Z 的分布函数记为 $F_Z(z)$, 那么

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\}$$

$$\begin{aligned}
&= P\{X+Y \leq z\} \\
&= P\{X=0\}P\{X+Y \leq z | X=0\} + P\{X=2\}P\{X+Y \leq z | X=2\} \\
&= \frac{1}{2}P\{Y \leq z\} + \frac{1}{2}P\{Y \leq z-2\}.
\end{aligned}$$

当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = 0$;

当 $0 \leq z < 1$ 时, $F_Z(z) = \frac{1}{2}P\{Y \leq z\} = \frac{z^2}{2}$;

当 $1 \leq z < 2$ 时, $F_Z(z) = \frac{1}{2}$;

当 $2 \leq z < 3$ 时, $F_Z(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P\{Y \leq z-2\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(z-2)^2$;

当 $z \geq 3$ 时, $F_Z(z) = 1$.

所以 Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} z, & 0 < z < 1, \\ z-2, & 2 < z < 3, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(23) 解 (I) Z_1 的分布函数为

$$F(z) = P\{Z_1 \leq z\} = P\{|X_1 - \mu| \leq z\} = \begin{cases} 2\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) - 1, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0, \end{cases}$$

所以 Z_1 的概率密度为

$$f(z) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

$$(II) EZ_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} z f(z) dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{+\infty} z e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sigma.$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}EZ_1, \text{ 令 } \bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i, \text{ 得 } \sigma \text{ 的矩估计量为 } \hat{\sigma} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\bar{Z}$$

(III) 记 $z_1, z_2, \dots, z_n$ 为样本 $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ 的观测值, 则似然函数为

$$L(\sigma) = \prod_{i=1}^n f(z_i) = \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2},$$

$$\text{对数似然函数为 } \ln L(\sigma) = n \ln \frac{2}{\sqrt{2\pi}} - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2.$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\sigma)}{d\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n z_i^2 = 0, \text{ 得 } \sigma \text{ 的最大似然估计值为 } \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2}, \text{ 所以 } \sigma \text{ 的最大}$$

$$\text{似然估计量为 } \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^2}.$$