

2017年

## 数学(三) 参考答案

### 一、选择题

(1) A

解 由  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0, \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续, 得  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = b$ .

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2ax} = \frac{1}{2a} = b.$$

所以  $ab = \frac{1}{2}$ . 故应选 A.

(2) D

解 令  $\begin{cases} z'_x = 3y - 2xy - y^2 = 0 \\ z'_y = 3x - 2xy - x^2 = 0 \end{cases}$ , 得  $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$ .

所以函数有四个驻点  $(0,0)$ ,  $(1,1)$ ,  $(0,3)$ ,  $(3,0)$ .

又令  $A = z''_{xx} = -2y$ ,  $B = z''_{xy} = 3 - 2x - 2y$ ,  $C = z''_{yy} = -2x$ .

则在  $(0,0)$  处,  $AC - B^2 = -9 < 0$ ,  $(0,0)$  不是极值点.

在  $(1,1)$  处,  $AC - B^2 = 3 > 0$ , 且  $A = -2 < 0$ ,  $(1,1)$  是极大值点.

在  $(0,3)$  处,  $AC - B^2 = -9 < 0$ ,  $(0,3)$  不是极值点.

在  $(3,0)$  处,  $AC - B^2 = -9 < 0$ ,  $(3,0)$  不是极值点.

故应选 D.

(3) C

解 由  $f(x)f'(x) > 0$ , 可得  $2f(x)f'(x) > 0$ , 即  $[f^2(x)]' > 0$ .

因此  $f^2(x)$  严格单增, 故有  $|f(x)|$  严格单增, 所以有  $|f(1)| > |f(-1)|$ .

故应选 C.

(4) C

解  $\sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ,  $k \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{k}{n} - \frac{k}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

有  $\sin \frac{1}{n} - k \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1+k}{n} + \frac{k}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ,

又  $\sum_{n=2}^{\infty} \left[ \sin \frac{1}{n} - k \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right]$  收敛, 有  $1+k=0$ . (否则, 级数发散), 故  $k=-1$ .

故应选 C.

(5) A

解 因为  $\alpha$  为 3 维单位列向量, 故  $\alpha^T \alpha = 1 = \text{tr}(\alpha \alpha^T)$ .

所以,  $A = \alpha \alpha^T$  的特征值为 1, 0, 0. 所以,  $|E - \alpha \alpha^T| = 0$ , 即矩阵  $E - \alpha \alpha^T$  不可逆.

故应选 A.

(6) B

解 因为  $A$  和  $B$  都是上三角矩阵, 所以特征值都是  $1, 2, 2$ .

所以, 要判别  $A$  和  $B$  能否相似对角化, 只需考察属于  $2$  的线性无关的特征向量的个数即可.

对于  $A$ , 属于  $2$  的线性无关的特征向量的个数  $3 - r(2E - A) = 3 - 1 = 2$ .

对于  $B$ , 属于  $2$  的线性无关的特征向量的个数  $3 - r(2E - B) = 3 - 2 = 1$ .

所以,  $A$  可以和  $C$  相似, 但是  $B$  不能.

故应选 B.

(7) C

解 因为  $A$  与  $C$  相互独立,  $B$  与  $C$  相互独立.

所以  $P(AC) = P(A)P(C)$ ,  $P(BC) = P(B)P(C)$

而  $P[(A \cup B)C] = P(AC \cup BC)$

$$= P(AC) + P(BC) - P(ABC)$$

$$P(A \cup B)P(C) = [P(A) + P(B) - P(AB)]P(C)$$

$$= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(AB)P(C)$$

则  $A \cup B$  与  $C$  相互独立  $\Leftrightarrow P[(A \cup B)C] = P(A \cup B)P(C) \Leftrightarrow P(ABC) = P(AB)P(C)$

$\Leftrightarrow AB$  与  $C$  相互独立, 故应选 C.

(8) B

解 因为  $X_i \sim N(\mu, 1)$ ,

所以  $X_i - \mu \sim N(0, 1)$ ,

则  $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$ , 故 A 正确;

因为  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{1} \sim \chi^2(n-1)$ , 故 C 正确;

因为  $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{n}\right)$ ,

所以  $\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$ ,

则  $n(\bar{X} - \mu)^2 \sim \chi^2(1)$ , 故 D 正确.

对于 B 选项:  $X_n - X_1 \sim N(0, 2)$ ,

则  $\frac{X_n - X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1)$ , 所以  $\left(\frac{X_n - X_1}{2}\right)^2 \sim \chi^2(1)$ . 从而 B 错误.

故应选 B.

## 二、填空题

(9)  $\frac{\pi^3}{2}$

解  $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^3 x + \sqrt{\pi^2 - x^2}) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\pi^2 - x^2} dx$

因为  $\sin^3 x$  是奇函数, 所以  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x dx = 0$ .

而  $\sqrt{\pi^2 - x^2}$  为偶函数, 因此  $\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\pi^2 - x^2} dx = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{\pi^2 - x^2} dx$

$\int_0^{\pi} \sqrt{\pi^2 - x^2} dx$  表示由  $x=0, x=\pi, y=0, y=\sqrt{\pi^2 - x^2}$  所围成图形的面积,

$$\text{故有 } \int_0^{\pi} \sqrt{\pi^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi \cdot \pi^2 = \frac{\pi^3}{4}.$$

$$\text{所以 } \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^3 x + \sqrt{\pi^2 - x^2}) dx = \frac{\pi^3}{2}.$$

故应填  $\frac{\pi^3}{2}$ .

(10)  $A2^t + t2^{t-1}$

解  $y_{t+1} - 2y_t = 2^t$  对应的齐次方程为  $y_{t+1} - 2y_t = 0$ ,

特征方程为  $\lambda^{t+1} - 2\lambda^t = 0$ , 特征根为  $\lambda = 2$ .

因  $y_{t+1} - 2y_t = 0$  的通解为  $Y_t = A2^t$ ,

再设  $y_t^* = kt2^t$  为  $y_{t+1} - 2y_t = 2^t$  的解, 代入方程得

$$k(t+1)2^{t+1} - 2kt2^t = 2^t.$$

$$\text{解得 } k = \frac{1}{2}. \text{ 所以 } y_t^* = \frac{1}{2}t2^t = t2^{t-1}.$$

由差分方程解的结构定理得, 原方程的通解为

$$y_t = Y_t + y_t^* = A2^t + t2^{t-1}.$$

故应填  $A2^t + t2^{t-1}$ .

(11)  $1 + (1-Q)e^{-Q}$

解 平均成本  $\bar{C}(Q) = 1 + e^{-Q}$ , 成本为  $C(Q) = Q\bar{C}(Q) = Q + Qe^{-Q}$ .

边际成本为  $C'(Q) = 1 + e^{-Q} - Qe^{-Q} = 1 + (1-Q)e^{-Q}$ .

故应填  $1 + (1-Q)e^{-Q}$ .

(12)  $xye^y$

解 由题意  $f'_x(x, y) = ye^y, f'_y(x, y) = x(1+y)e^y$ .

$$\text{所以有 } f(x, y) = \int f'_x(x, y) dx = \int ye^y dx = xye^y + C(y).$$

$$f'_y(x, y) = [xye^y + C(y)]' = x(1+y)e^y + C'(y) = x(1+y)e^y,$$

$$\therefore C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = C.$$

因此  $f(x, y) = xye^y + C$ , 又  $f(0, 0) = 0$ .

所以  $C = 0$ . 故  $f(x, y) = xye^y$ .

故应填  $xye^y$ .

(13) 2

解  $(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , 因为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 故矩阵  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  可逆,

所以  $r(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = r(A)$ , 易知,  $r(A) = 2$ . 故应填 2.

(14)  $\frac{9}{2}$

解 由分布律的归一性可知  $\sum_k P_k = 1$

$$\text{即 } \frac{1}{2} + a + b = 1,$$

$$\text{又因为 } EX = 0, \text{ 即 } -2 \times \frac{1}{2} + a + 3b = 0.$$

$$\text{解得 } a = b = \frac{1}{4}.$$

$$\text{而 } E(X^2) = (-2)^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{4} = \frac{9}{2}.$$

$$\text{所以 } DX = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{9}{2}.$$

### 三、解答题

(15) 解 令  $x - t = u$ , 则  $t = x - u, dt = -du$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x^3}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du}{\sqrt{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du}{\sqrt{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} e^{-x}}{\frac{3}{2} \sqrt{x}} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (16) \text{ 解 } \iint_D \frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2} dx dy &= \int_0^{+\infty} dx \int_0^{\sqrt{x}} \frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2} dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{-1}{1+x^2+y^4} \Big|_0^{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+2x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \left( \arctan x \Big|_0^{+\infty} - \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \sqrt{2} x \Big|_0^{+\infty} \right) \\ &= \frac{2-\sqrt{2}}{16} \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (17) \text{ 解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right) \cdot \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 x \ln(1+x) dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln(1+x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \left( x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} (x-1)^2 \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \ln(1+x) \Big|_0^1 \\ = \frac{1}{4}.$$

(18) 解 记  $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} - k, x \in (0, 1]$ , 则  $f'(x) = \frac{(1+x)\ln^2(1+x) - x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$ .

记  $g(x) = (1+x)\ln^2(1+x) - x^2$ , 则

$$g'(x) = \ln^2(1+x) + 2\ln(1+x) - 2x,$$

$$g''(x) = \frac{2[\ln(1+x) - x]}{1+x}.$$

当  $x \in (0, 1]$  时,  $g''(x) < 0$ , 所以  $g'(x) < g'(0)$ .

又  $g'(0) = 0$ , 所以当  $x \in (0, 1]$  时,  $g'(x) < 0$ , 从而  $g(x) < g(0) = 0$ .

综上所述  $f'(x) < 0$ , 即  $f(x)$  单调递减.

由于  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} - k \right) = \frac{1}{2} - k, f(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1 - k,$

所以方程  $f(x) = 0$  在区间  $(0, 1)$  内有实根当且仅当 
$$\begin{cases} \frac{1}{2} - k > 0, \\ \frac{1}{\ln 2} - 1 - k < 0. \end{cases}$$

故常数  $k$  的取值范围为  $\left( \frac{1}{\ln 2} - 1, \frac{1}{2} \right)$ .

(19) 解 (I) 因为  $a_0 = 1, a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{1}{n+1}(na_n + a_{n-1})$ , 所以  $0 \leq a_{n+1} \leq 1$

记  $R$  为幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径. 当  $|x| < 1$  时, 因为  $|a_n x^n| \leq \|x\|^n$  且级数  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  收

敛, 所以幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  绝对收敛, 于是  $(-1, 1) \subseteq (-R, R)$ , 故  $R \geq 1$ .

(II) 因为  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 所以  $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$

于是  $(1-x)S'(x) - xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$

$$= a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$$

$$= a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1) a_{n+1} - n a_n - a_{n-1}] x^n$$

$$= 0.$$

解方程  $(1-x)S'(x) - xS(x) = 0$  得  $S(x) = \frac{C e^{-x}}{1-x}$ .

由  $S(0) = a_0 = 1$  得  $C = 1$ , 故  $S(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ .

(20) 解 (I) 由  $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ , 知  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关, 故  $r(A) \leq 2$ .

又因为  $A$  有 3 个不同的特征值, 所以  $A$  至少有 2 个不为零的特征值, 从而  $r(A) \geq 2$ .

故  $r(\mathbf{A})=2$ .

(II) 由  $\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = \mathbf{0}$ , 知  $\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ , 故  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  为方程组  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的一个解.

又  $r(\mathbf{A})=2$ , 所以  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  为  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的一个基础解系.

因为  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 所以  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  为方程组  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \beta$  的一个特解.

故  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \beta$  的通解为  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ , 其中  $k$  为任意常数.

(21) 解 二次型  $f$  的矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

由题设知  $|\mathbf{A}|=0$ . 又  $|\mathbf{A}|=6-3a$ , 于是  $a=2$ .

矩阵  $\mathbf{A}$  的特征多项式为  $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \lambda(\lambda+3)(\lambda-6)$ , 所以特征值为  $-3, 6, 0$ .

不妨设  $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 0$ .

矩阵  $\mathbf{A}$  属于特征值  $\lambda_1 = -3$  的单位特征向量为  $\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T$ ;

属于特征值  $\lambda_2 = 6$  的单位特征向量为  $\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T$ ;

属于特征值  $\lambda_3 = 0$  的单位特征向量为  $\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$ .

故所求的一个正交矩阵为  $\mathbf{Q} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ .

(22) 解 (I)  $EY = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)dy = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}$ ,

$$P\{Y \leq EY\} = P\left\{Y \leq \frac{2}{3}\right\} = \int_0^{\frac{2}{3}} 2y dy = \frac{4}{9}.$$

(II)  $Z$  的分布函数记为  $F_Z(z)$ , 那么

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} \\ &= P\{X + Y \leq z\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= P\{X=0\}P\{X+Y \leq z | X=0\} + P\{X=2\}P\{X+Y \leq z | X=2\} \\
 &= \frac{1}{2}P\{Y \leq z\} + \frac{1}{2}P\{Y \leq z-2\}.
 \end{aligned}$$

当  $z < 0$  时,  $F_Z(z) = 0$ ;

当  $0 \leq z < 1$  时,  $F_Z(z) = \frac{1}{2}P\{Y \leq z\} = \frac{z^2}{2}$ ;

当  $1 \leq z < 2$  时,  $F_Z(z) = \frac{1}{2}$ ;

当  $2 \leq z < 3$  时,  $F_Z(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P\{Y \leq z-2\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(z-2)^2$ ;

当  $z \geq 3$  时,  $F_Z(z) = 1$ .

所以  $Z$  的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} z, & 0 < z < 1, \\ z-2, & 2 < z < 3, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(23) 解 (I)  $Z_1$  的分布函数为

$$F(z) = P\{Z_1 \leq z\} = P\{|X_1 - \mu| \leq z\} = \begin{cases} 2\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) - 1, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0, \end{cases}$$

所以  $Z_1$  的概率密度为

$$f(z) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

$$(\text{II}) EZ_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} zf(z)dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{+\infty} ze^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sigma.$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}EZ_1, \text{ 令 } \bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i, \text{ 得 } \sigma \text{ 的矩估计量为 } \hat{\sigma} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\bar{Z}.$$

(III) 记  $z_1, z_2, \dots, z_n$  为样本  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  的观测值, 则似然函数为

$$L(\sigma) = \prod_{i=1}^n f(z_i) = \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2},$$

$$\text{对数似然函数为 } \ln L(\sigma) = n \ln \frac{2}{\sqrt{2\pi}} - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2.$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\sigma)}{d\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n z_i^2 = 0, \text{ 得 } \sigma \text{ 的最大似然估计值为 } \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2}, \text{ 所以 } \sigma \text{ 的最大}$$

$$\text{似然估计量为 } \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^2}.$$