

2015年(数一) 真题答案解析

一、选择题

(1) C

解 由二阶导函数 $\bar{y} = f''(x)$ 的图形可知, 二阶导数为零的点有两个, 而 $x=0$ 则是二阶导数不存在的点.

在二阶导数为零的点中只有一个点左、右两侧二阶导数的符号相反, 因此对应曲线 $y = f(x)$ 上一个拐点.

在 $x=0$ 左侧, $f''(x)$ 为正, 在 $x=0$ 右侧, $f''(x)$ 为负, 因曲线 $y = f(x)$ 上点 $(0, f(0))$ 也是一个拐点.

故曲线 $y = f(x)$ 共有 2 个拐点, 故应选 C.

(2) A

解 由题设条件知, $y_1 = \frac{1}{2}e^{2x}$, $y_2 = -\frac{1}{3}e^x$ 是已知二阶常系数非齐次线性微分方程所对应的

齐次微分方程的两个特解, 由此知 $r_1 = 2, r_2 = 1$ 是特征方程 $r^2 + ar + b = 0$ 的两个根.

由一元二次方程根与系数的关系, 得 $a = -(2+1) = -3, b = 2$,

于是原方程化为 $y'' - 3y' + 2y = ce^x$,

由二阶常系数非齐次线性微分方程解的结构知: $y_3 = xe^x$ 是原方程的一个特解, 将 $y_3 = xe^x$ 代入 $y'' - 3y' + 2y = ce^x$ 中, 得 $c = -1$, 即 $a = -3, b = 2, c = -1$. 故应选 A.

(3) B

解 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=1$ 处条件收敛, 因此该级数的收敛半径 $R=1$, 收敛区间为: $(-1, 1)$;

根据收敛半径 R 的计算定理, 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 的收敛半径也是 $R=2$, 而其收敛区间为: $(0, 2)$;

而幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n (x-1)^n$ 可视为由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 逐项求导所得, 根据幂级数的性质知, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} na_n (x-1)^n$ 的收敛区间仍是 $(0, 2)$, 因为 $\sqrt{3} \in (0, 2)$, 所以 $x = \sqrt{3}$ 是收敛点.

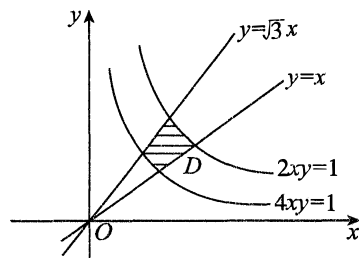
而 $x=3$ 不属于 $(0, 2)$, 由数项级数收敛与发散的定理知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n 2^n$ 发散, 即 $x=3$ 是发散点.

(4) B

解 如右图示, 在极坐标系中积分区域 D 为:

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}} \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}} \right\},$$

于是有 $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$. 故应选 B.



(5) D

解

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{vmatrix} = (a-2)(a-1)(2-1) = (a-2)(a-1).$$

由线性方程组有无穷多解,得 $|\mathbf{A}|=0$, 即 $a=1$ 或 $a=2$.

$$\text{当 } a=1 \text{ 时, } (\mathbf{A}, \mathbf{b}) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & d-1 \\ 0 & 0 & 0 & (d-1)(d-2) \end{pmatrix},$$

由题意,知 $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) < 3$, 即 $d=1$ 或 $d=2$.

$$\text{同理,当 } a=2 \text{ 时, } (\mathbf{A}, \mathbf{b}) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & d-1 \\ 0 & 0 & 0 & (d-1)(d-2) \end{pmatrix},$$

由题意,如 $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) < 3$, 即 $d=1$ 或 $d=2$. 故应选 D.

(6) A

$$\text{解} \quad \mathbf{Q} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{又因为} \quad \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

故应选 A.

(7) C

解 对于 A, B 选项:

当事件 A 与 B 独立时, $P(AB) = P(A)P(B)$.

而当 A, B 不独立时, $P(AB)$ 与 $P(A)P(B)$ 没有确定的关系, 所以 A, B 选项错误.

对于 C, D 选项:

由概率性质 $P(A) \geq P(AB)$, $P(B) \geq P(AB)$, 两式相加, 得

$$P(A) + P(B) \geq 2P(AB), \text{ 即 } P(AB) \leq \frac{P(A) + P(B)}{2}. \text{ 故应选 C.}$$

(8) D

解 因为 X, Y 不相关, 所以 $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) = EX \cdot EY = 0$, 即 $E(XY) = EX \cdot EY$,

$$\begin{aligned} \text{则} \quad E[X(X+Y-2)] &= E(X^2 + XY - 2X) = E(X^2) + E(XY) - 2EX \\ &= [DX + (EX)^2] + EX \cdot EY - 2EX = 5. \end{aligned}$$

二、填空题

$$(9) -\frac{1}{2}$$

解 利用等价无穷小代换.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[1 + (\cos x - 1)]}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

$$(10) \frac{\pi^2}{4}$$

解 因为 $\frac{\sin x}{1+\cos x}$ 为奇函数, $|x|$ 是偶函数, 且积分区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 关于原点对称, 所以由奇、偶函数在对称区间上的定积分性质得

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1+\cos x} + |x| \right) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x} dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |x| dx = 0 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = x^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}.$$

$$(11) -dx$$

解 令 $F(x, y, z) = e^z + xyz + x + \cos x - 2$, 则

$$F'_x = yz + 1 - \sin x; F'_y = xz; F'_z = e^z + xy,$$

将 $x=0, y=1$ 代入已知方程得, $e^z = 1 \Rightarrow z=0$, 所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,1)} = - \frac{F'_x}{F'_z} \Big|_{(0,1,0)} = - \frac{yz + 1 - \sin x}{xy + e^z} \Big|_{(0,1,0)} = -1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0,1)} = - \frac{F'_y}{F'_z} \Big|_{(0,1,0)} = - \frac{xz}{xy + e^z} \Big|_{(0,1,0)} = 0,$$

于是由公式得 $dz \Big|_{(0,1)} = - \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,1)} dx + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0,1)} dy = -dx$.

$$(12) \frac{1}{4}$$

解 利用轮换对称性知: $\iiint_{\Omega} x dV = \iiint_{\Omega} y dV = \iiint_{\Omega} z dV$, 于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) dx dy dz &= 6 \iiint_{\Omega} x dx dy dz = 6 \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \\ &= \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy = 3 \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) dx \\ &= 3 \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$(13) 2^{n+1} - 2$$

解 第 i 行的 $\frac{1}{2}$ 倍加到第 $i+1$ 行, $i=1, 2, \dots, n-1$.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 2 + 2 \times \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 + 2 \times \frac{1}{2} + \cdots + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 + 2 \times \frac{1}{2} + \cdots + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] \end{vmatrix} = 2^{n+1} - 2. \end{aligned}$$

$$(14) \frac{1}{2}$$

解 由于相关系数为0,所以 X, Y 都服从正态分布,即 $X \sim N(1, 1), Y \sim N(0, 1)$,且 X 和 Y 相互独立.

由 $X \sim N(1, 1)$,可得 $X - 1 \sim N(0, 1)$,所以

$$\begin{aligned} P\{XY - Y < 0\} &= P\{(X - 1)Y < 0\} \\ &= P\{X - 1 < 0, Y > 0\} + P\{X - 1 > 0, Y < 0\} \\ &= P\{X - 1 < 0\} P\{Y > 0\} + P\{X - 1 > 0\} P\{Y < 0\} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

三、解答题

$$(15) \text{ 解 } \text{ 由于 } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= x + a \ln(1+x) + bx \sin x \\ &= x + a \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) + bx^2 + o(x^3) \\ &= (1+a)x + \left(b - \frac{a}{2} \right) x^2 + \frac{a}{3} x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

$$\text{因为 } f(x) \text{ 与 } g(x) = kx^3 \text{ 在 } x \rightarrow 0 \text{ 时等价, 所以 } \begin{cases} 1+a=0, \\ b-\frac{a}{2}=0, \\ k=\frac{a}{3}. \end{cases}$$

$$\text{解得 } a = -1, b = -\frac{1}{2}, k = -\frac{1}{3}.$$

(16) 解 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

该切线与 x 轴的交点为 $\left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, 0\right)$.

$$\text{根据题设条件可知 } \frac{1}{2} \frac{|f(x_0)|}{f'(x_0)} \cdot |f(x_0)| = 4,$$

$$\text{即 } y = f(x) \text{ 满足方程 } y' = \frac{1}{8} y^2.$$

$$\text{解得 } y = -\frac{8}{8C+x}.$$

$$\text{因为 } f(0) = 2, \text{ 所以 } C = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{故 } f(x) = \frac{8}{4-x}, x \in I.$$

(17) 解 因为函数在每一点沿梯度方向的方向导数最大,且最大方向导数是该点梯度向量的长度,而

$$\text{grad}f(x, y) = (1 + y, 1 + x), \quad |\text{grad}f(x, y)| = \sqrt{(1 + x)^2 + (1 + y)^2},$$

因此, 问题转化为求 $\sqrt{(1 + x)^2 + (1 + y)^2}$ 在条件 $x^2 + y^2 + xy = 3$ 下的最大值.

令 $F(x, y, \lambda) = (1 + x)^2 + (1 + y)^2 + \lambda(x^2 + y^2 + xy - 3)$, 由

$$\begin{cases} F'_x = 2(1 + x) + \lambda(2x + y) = 0, \\ F'_y = 2(1 + y) + \lambda(2y + x) = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 + xy - 3 = 0 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases} \begin{cases} x = -1, \\ y = -1, \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ y = -1, \end{cases} \begin{cases} x = -1, \\ y = 2. \end{cases}$

又 $|\text{grad}f(1, 1)| = 2\sqrt{2},$

$|\text{grad}f(-1, -1)| = 0,$

$|\text{grad}f(2, -1)| = |\text{grad}f(-1, 2)| = 3,$

所以 $f(x, y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数为 3.

(18) 解 (I) 因为函数 $u(x), v(x)$ 可导, 所以

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = u'(x), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = v'(x), \quad \text{且} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) = v(x).$$

从而

$$\begin{aligned} [u(x)v(x)]' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} v(x + \Delta x) + u(x) \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) + u(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \\ &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \end{aligned}$$

(II)

$$f'(x) = u'_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x) + u_1(x)u'_2(x)\cdots u_n(x) + \cdots + u_1(x)u_2(x)\cdots u'_n(x).$$

(19) 解 设 L_1 是从点 B 到点 A 的直线段, Σ 为平面 $z = x$ 上由 L 与 L_1 围成的半圆面下

侧, 其法向量的方向余弦为 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

由 Stokes 公式

$$\begin{aligned} &\oint_{L+L_1} (y+z)dx + (z^2 - x^2 + y)dy + x^2y^2dz \\ &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & z^2 - x^2 + y & x^2y^2 \end{vmatrix} dS = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{\Sigma} (2x^2y + 1) dS. \end{aligned}$$

由于曲面 Σ 关于 xOz 平面对称, 所以 $\iint_{\Sigma} 2x^2y dS = 0$, 故

$$\oint_{L+L_1} (y+z)dx + (z^2 - x^2 + y)dy + x^2y^2dz = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{\Sigma} dS = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi.$$

又 L_1 的参数方程为 $x=0, y=y, z=0$ (y 从 $-\sqrt{2}$ 到 $\sqrt{2}$), 所以

$$\int_{L_1} (y+z)dx + (z^2 - x^2 + y)dy + x^2 y^2 dz = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} y dy = 0.$$

因此 $I = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

(20) 解 (I) 由于

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (2\alpha_1 + 2k\alpha_3, 2\alpha_2, \alpha_1 + (k+1)\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P,$$

其中

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix},$$

且 $|P| = 4 \neq 0$, 所以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基.

(II) 设 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标向量为 x , 则

$$\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)Px,$$

所以

$$(P - E)x = 0.$$

对 $P - E$ 施以初等行变换

$$P - E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2k & 0 & k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix},$$

所以当 $k=0$ 时, 方程组 $(P - E)x = 0$ 有非零解, 且所有非零解为

$$x = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, c \text{ 为任意非零常数.}$$

故在两个基下坐标相同的所有非零向量为

$$\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -c \end{pmatrix} = c(\alpha_1 - \alpha_3), c \text{ 为任意非零常数.}$$

(21) 解 (I) 由于矩阵 A 与矩阵 B 相似, 所以

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(B), |A| = |B|,$$

于是

$$3 + a = 2 + b, 2a - 3 = b,$$

解得

$$a = 4, b = 5.$$

$$(II) \text{ 由 (I) 知 } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

由于矩阵 A 与矩阵 B 相似, 所以

$$|\lambda E - A| = |\lambda E - B| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 5).$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 5$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时, 解方程组 $(E - A)x = 0$, 得线性无关的特征向量 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

当 $\lambda_3 = 5$ 时, 解方程组 $(5\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 得特征向量 $\xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

令 $\mathbf{P} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

故 $\mathbf{P}$ 为所求可逆矩阵.

(22) 解 (I) 每次观测中, 观测值大于 3 的概率为

$$P\{X > 3\} = \int_3^{+\infty} f(x)dx = \int_3^{+\infty} 2^{-x} \ln 2 dx = \frac{1}{8},$$

故 Y 的概率分布为

$$P\{Y = k\} = (k-1) \left(\frac{7}{8}\right)^{k-2} \left(\frac{1}{8}\right)^2, \quad k = 2, 3, \dots$$

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad EY &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \left(\frac{7}{8}\right)^{k-2} \left(\frac{1}{8}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{8}\right)^2 \left(\sum_{k=2}^{\infty} x^k \right)'' \Big|_{x=\frac{7}{8}} \\ &= \left(\frac{1}{8}\right)^2 \frac{2}{(1-x)^3} \Big|_{x=\frac{7}{8}} \\ &= 16. \end{aligned}$$

(23) 解 (I) 由于总体 X 服从区间 $[\theta, 1]$ 上的均匀分布, 所以

$$EX = \frac{1+\theta}{2}.$$

令 $\frac{1+\theta}{2} = \bar{X}$, 其中 $\bar{X}$ 为样本均值, 得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta} = 2\bar{X} - 1$.

(II) 记 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的观测值, 则似然函数为

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta \leq x_i \leq 1 (i=1, 2, \dots, n), \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta \leq \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$

由此可知, 当 $\theta = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 时, $L(\theta)$ 达到最大, 故 θ 的最大似然估计量

$$\hat{\theta} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$