

2013年（数一）真题答案解析

一、选择题

(1) D

解 用洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2-1}{kx^{k-1}(1+x^2)} = \frac{1}{k} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^{k-1}} = c \neq 0,$$

因此 $k-1=2$, $\frac{1}{k}=c$, 即 $k=3, c=\frac{1}{3}$. 故应选 D.

(2) A

解 $F'_x = 2x - y \sin(xy) + 1$, $F'_y = -x \sin(xy) + z$, $F'_z = y$.

曲面 $x^2 + \cos(xy) + yz + x = 0$ 在点 $(0, 1, -1)$ 处的切平面的法向量 $\mathbf{n} = \{1, -1, 1\}$,
切平面方程为:

$$1 \cdot (x-0) - (y-1) + 1 \cdot (z+1) = 0,$$

即 $x - y + z = -2$. 故应选 A.

(3) C

解 观察到 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的正弦函数, 对 f 进行奇延拓, 其周期为 2.

故 $S(x) = f(x)$.

$$S\left(-\frac{9}{4}\right) = S\left(-\frac{1}{4}\right) = -S\left(\frac{1}{4}\right) = -f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}. \text{故应选 C.}$$

(4) D

解 由格林公式得

$$I_i = \oint_{\Delta_i} \left(y + \frac{y^3}{6}\right) dx + \left(2x - \frac{x^3}{3}\right) dy = \iint_{D_i} \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{2}\right) dx dy,$$

其中 $D_1: x^2 + y^2 \leq 1$,

$$D_2: x^2 + y^2 \leq 2,$$

$$D_3: \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1,$$

$$D_4: x^2 + \frac{y^2}{2} \leq 1.$$

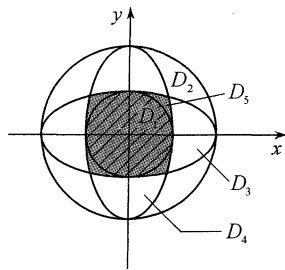
显然在 D_4 内有

$$1 - x^2 - \frac{y^2}{2} > 0, \text{在 } D_4 \text{ 外有 } 1 - x^2 - \frac{y^2}{2} < 0,$$

又如图有 $D_1 \subset D_4, D_4 \subset D_2$. 由重积分性质知 $I_4 > I_1, I_4 > I_2$.

又 $D_4 = D_5 + D_4 \setminus D_5, D_3 = D_5 + D_3 \setminus D_5$, 在 $D_3 \setminus D_5$ 上 $1 - x^2 - \frac{y^2}{2} < 0$, 在 $D_4 \setminus D_5$ 上

$$1 - x^2 - \frac{y^2}{2} > 0,$$



$$\begin{aligned} \text{故 } I_4 &= \iint_{D_5} \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{2}\right) dx dy + \iint_{D_4 \setminus D_5} \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{2}\right) dx dy \\ &> I_3 = \iint_{D_5} \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{2}\right) dx dy + \iint_{D_3 \setminus D_5} \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{2}\right) dx dy. \text{故应选 D.} \end{aligned}$$

(5) B

解 由于 $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$, 那么对矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{C}$ 按列分块, 有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n),$$

$$\text{即 } \begin{cases} \gamma_1 = b_{11}\alpha_1 + b_{21}\alpha_2 + \cdots + b_{n1}\alpha_n, \\ \gamma_2 = b_{12}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + \cdots + b_{n2}\alpha_n, \\ \dots\dots\dots \\ \gamma_n = b_{1n}\alpha_1 + b_{2n}\alpha_2 + \cdots + b_{nn}\alpha_n. \end{cases}$$

这说明矩阵 $\mathbf{C}$ 的列向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ 可由矩阵 $\mathbf{A}$ 的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出.

又矩阵 $\mathbf{B}$ 可逆, 从而 $\mathbf{A} = \mathbf{CB}^{-1}$, 那么矩阵 $\mathbf{A}$ 的列向量组也可由矩阵 $\mathbf{C}$ 的列向量组线性表出.

由向量组等价的定义可知, 应选 B.

(6) B

$$\text{解 记 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}, \text{考察矩阵 } \mathbf{A} \text{ 的特征值为 } 2, b, 0 \text{ 的条件.}$$

首先, 显然 $|\mathbf{A}| = 0$, 因此 0 是 $\mathbf{A}$ 的特征值.

其次, 矩阵 $\mathbf{A}$ 的迹 $\text{tr}(\mathbf{A}) = 2 + b$, 因此如果 2 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值, 则 b 就是矩阵 $\mathbf{A}$ 的另一个特征值. 于是“充要条件”为 2 是 $\mathbf{A}$ 的特征值. 由

$$|2\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ -a & 2-b & -a \\ -1 & -a & 1 \end{vmatrix} = -4a^2 = 0 \Rightarrow a = 0.$$

因此充要条件为 $a = 0, b$ 为任意实数, 故应选 B.

(7) A

解 将随机变量 X_2 和 X_3 化成标准正态后再比较其大小.

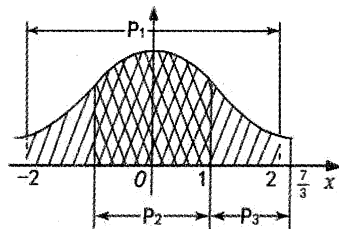
$$p_1 = P\{-2 \leq X_1 \leq 2\} = \Phi(2) - \Phi(-2),$$

$$p_2 = P\{-2 \leq X_2 \leq 2\} = P\left\{-\frac{2}{2} \leq \frac{X_2}{2} \leq \frac{2}{2}\right\} = \Phi(1) - \Phi(-1),$$

$$\begin{aligned} p_3 &= P\{-2 \leq X_3 \leq 2\} \\ &= P\left\{\frac{-2-5}{3} \leq \frac{X_3-5}{3} \leq \frac{2-5}{2}\right\} \\ &= \Phi(-1) - \Phi\left(-\frac{7}{3}\right) = \Phi\left(\frac{7}{3}\right) - \Phi(1), \end{aligned}$$

由右图正态分布曲线下的面积所代表的概率可知

$p_1 > p_2 > p_3$. 故应选 A.



(8) C

解 当 $X \sim t(n)$ 时, $X^2 \sim F(1, n)$, 又 $Y \sim F(1, n)$, 故 Y 与 X^2 同分布.

当 $c > 0$ 时, 由 t 分布的对称性有

$$P\{Y > c^2\} = P\{X^2 > c^2\} = P\{|X| > c\} = P\{X > c \cup X < -c\} = 2P\{X > c\} = 2\alpha.$$

故应选 C.

二、填空题

(9) 1

解 把 $x=0$ 代入方程有 $f(0)=1$. 方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 两端同时对 x 求导有

$$f'(x) - 1 = e^{x[1-f(x)]} [1 - f(x) - x f'(x)].$$

把 $x=0$ 代入上式得 $f'(0) = 2 - f(0) = 1$.

$$\text{又} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = f'(0) = 1,$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1.$$

(10) $C_1 e^x + C_2 e^{3x} - x e^{2x}$

解 由常数系数非齐次线性微分方程解的性质可得

$$y_1 - y_3 = e^{3x}, \quad y_2 - y_3 = e^x$$

是相应二阶齐次线性微分方程的两个特解.

故相应二阶齐次线性微分方程的通解为

$$y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^x.$$

所以所求非齐次方程的通解可表示为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - x e^{2x}.$$

(11) $\sqrt{2}$

$$\text{解} \quad \because \frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = t \cos t,$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{t \cos t}{\cos t} = t,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{\cos t},$$

$$\text{从而} \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}.$$

(12) $\ln 2$

$$\text{解} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = - \left. \frac{\ln x}{1+x} \right|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)x} = 0 + \ln \left. \frac{x}{1+x} \right|_1^{+\infty} = 0 - \ln \frac{1}{2} = \ln 2.$$

(13) -1

解 题设条件“ $a_{ij} + A_{ij} = 0$ ”即 $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}^*$, 于是 $|\mathbf{A}| = -|\mathbf{A}|^2$, 可见 $|\mathbf{A}|$ 只可能是 0 或 -1.

又 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^T) = r(-\mathbf{A}^*) = r(\mathbf{A}^*)$, 则 $r(\mathbf{A})$ 只可能为 3 或 0.

而 $\mathbf{A}$ 为非零矩阵, 因此 $r(\mathbf{A})$ 不能为 0, 从而 $r(\mathbf{A}) = 3$, $|\mathbf{A}| \neq 0$, $|\mathbf{A}| = -1$.

或, 用特例法. 取一个行列式为 -1 的正交矩阵满足 $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}^*$.

故应填 -1.

(14) $1 - \frac{1}{e}$

解 由于 $X \sim E(1)$, $a > 0$, 则由指数分布的分布函数有

$$\begin{aligned} P\{Y \leq a+1 | Y > a\} &= \frac{P\{Y > a, Y \leq a+1\}}{P\{Y > a\}} = \frac{P\{a < Y \leq a+1\}}{1 - P\{Y \leq a\}} \\ &= \frac{1 - e^{-(a+1)} - (1 - e^{-a})}{1 - (1 - e^{-a})} = \frac{e^{-a} - e^{-a-1}}{e^{-a}} = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

三、解答题

(15) **解** 由条件显然有

$$f(1) = 0, \quad f'(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

由分部积分法及换元积分法有

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int_0^1 f(x) d\sqrt{x} \\ &= 2\sqrt{x}f(x) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \sqrt{x}f'(x) dx \\ &= -2 \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} dx \\ &= -4 \int_0^1 \ln(x+1) d\sqrt{x} \\ &= -4\sqrt{x} \ln(x+1) \Big|_0^1 + 4 \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx \\ &\stackrel{\text{令 } t=\sqrt{x}}{=} -4\ln 2 + 8 \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt \\ &= -4\ln 2 + 8 \left[\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt \right] \\ &= -4\ln 2 + 8 - 8 \arctan t \Big|_0^1 \\ &= -4\ln 2 + 8 - 2\pi. \end{aligned}$$

(16) (I) **证** $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$,

又 $\because a_{n-2} = n(n-1)a_n \quad (n \geq 2)$,

$$\therefore S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x),$$

$\therefore S''(x) - S(x) = 0$ 得证.

(II) 解 $S''(x) - S(x) = 0$ 为二阶常系数齐次线性微分方程, 其特征方程为

$$\lambda^2 - 1 = 0,$$

从而 $\lambda = \pm 1$, 于是 $S(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$.

又 $S(0) = a_0 = 3, S'(0) = a_1 = 1$,

$$\text{代入上式得 } \begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ -C_1 + C_2 = 1 \end{cases},$$

解得 $C_1 = 1, C_2 = 2$,

所以 $S(x) = e^{-x} + 2e^x$.

(17) 解 先求驻点, 令

$$\begin{cases} f_x = \left(x^2 + y + \frac{1}{3}x^3 \right) e^{x+y} = 0 \\ f_y = \left(1 + y + \frac{1}{3}x^3 \right) e^{x+y} = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

为了判断这两个驻点是否为极值点, 求二阶导数

$$\begin{cases} f_{xx} = \left(2x + 2x^2 + y + \frac{1}{3}x^3 \right) e^{x+y} \\ f_{xy} = \left(x^2 + 1 + y + \frac{1}{3}x^3 \right) e^{x+y} \\ f_{yy} = \left(2 + y + \frac{1}{3}x^3 \right) e^{x+y} \end{cases}$$

在点 $\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$ 处,

$$A = f_{xx} \left(-1, -\frac{2}{3}\right) = -e^{-\frac{5}{3}},$$

$$B = f_{xy} \left(-1, -\frac{2}{3}\right) = e^{-\frac{5}{3}},$$

$$C = f_{yy} \left(-1, -\frac{2}{3}\right) = e^{-\frac{5}{3}},$$

因为 $A < 0, AC - B^2 < 0$, 所以 $\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$ 不是极值点.

类似地, 在点 $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$ 处,

$$A = f_{xx} \left(1, -\frac{4}{3}\right) = 3e^{-\frac{1}{3}},$$

$$B = f_{xy} \left(1, -\frac{4}{3}\right) = e^{-\frac{1}{3}},$$

$$C = f_{yy} \left(1, -\frac{4}{3}\right) = e^{-\frac{1}{3}}$$

因为 $A > 0, AC - B^2 = 2e^{-\frac{2}{3}} > 0$, 所以 $(1, -\frac{4}{3})$ 是极小值点, 极小值为

$$f(1, -\frac{4}{3}) = (-\frac{4}{3} + \frac{1}{3})e^{-\frac{1}{3}} = -e^{-\frac{1}{3}}.$$

(18) 证 (I) 设 $F(x) = f(x) - x, x \in [-1, 1]$.

$\because f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(0) = 0$.

从而 $F(1) = f(1) - 1 = 0$,

$$F(0) = f(0) - 0 = 0,$$

且 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导. 由罗尔中值定理, 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $f'(\xi) = f(\xi) - 1 = 0$. 即 $f'(\xi) = 1$.

(II) 设 $G(x) = f'(x) + f(x) - x, -1 \leq x \leq 1$.

$\because f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是奇函数,

$\therefore f'(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是偶函数,

$$G(1) = f'(1) + f(1) - 1 = f'(1),$$

$$G(-1) = f'(-1) + f(-1) + 1 = f'(-1) = f'(1).$$

故 $G(1) = G(-1)$, 且 $G(x)$ 在 $[-1, 1]$ 内连续, 在 $(-1, 1)$ 内可导. 由罗尔中值定理, $\exists \eta \in (-1, 1)$ 使得

$$G'(\eta) = f''(\eta) + f'(\eta) - 1 = 0.$$

即 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

另解 1: 设 $G(x) = e^x (f'(x) - 1)$, 则由 (1): $G(\xi) = 0$.

又由于 $f(x)$ 为奇函数, 故 $f'(x)$ 为偶函数, 可知 $G(-\xi) = 0$.

则 $\exists \eta \in (-\xi, \xi) \subset (-1, 1)$ 使 $G'(\eta) = 0$,

$$\text{即 } e^\eta [f'(\eta) - 1] + e^\eta f''(\eta) = 0.$$

亦即 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

另解 2: 令 $G(x) = e^x (f'(x) - 1)$, 则 $G(\xi) = 0$.

由于 $f(x)$ 为奇函数, 故 $f'(x)$ 为偶函数, 得 $G(-\xi) = 0$.

$G(x)$ 在 $[-\xi, \xi] \subset [-1, 1]$ 上可导, 由罗尔定理知

$\exists \eta \in (-\xi, \xi) \subset (-1, 1), G'(\eta) = 0$,

即 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

(19) 解 (I) $\overline{AB} = \{-1, 1, 1\}$

$$L: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

$\forall M(x, y, z) \in \Sigma$, 对应于 L 上的点 $M_0(x_0, y_0, z)$, 则 $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$,

$$\text{由 } \begin{cases} x_0 = 1 - z \\ y_0 = z \end{cases}$$

$$\text{得 } \Sigma: x^2 + y^2 = (1 - z)^2 + z^2$$

$$\text{即 } \Sigma: x^2 + y^2 = 2z^2 - 2z + 1.$$

$$\text{(II) 显然 } \bar{x} = 0, \bar{y} = 0, \bar{z} = \frac{\iiint_{\Sigma} z \, dv}{\iiint_{\Sigma} dv},$$

$$\text{记 } D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2z^2 - 2z + 1\},$$

$$\iiint_D dv = \int_0^2 dz \iint_{D_z} dx dy = \pi \int_0^2 (2z^2 - 2z + 1) dz = \pi \left(\frac{16}{3} - 4 + 2 \right) = \frac{10}{3} \pi,$$

$$\iiint_D z dv = \int_0^2 z dz \iint_{D_z} dx dy = \pi \int_0^2 (2z^3 - 2z^2 + z) dz = \pi \left(8 - \frac{16}{3} + 2 \right) = \frac{14}{3} \pi,$$

$$\therefore \bar{z} = \frac{7}{5},$$

$$\therefore \text{形心坐标} \left(0, 0, \frac{7}{5} \right).$$

(20) 解 设 $C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, 则 $AC - CA = B$ 成立的充分必要条件为

$$\begin{cases} -x_2 + ax_3 = 0, \\ -ax_1 + x_2 + ax_4 = 1, \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_2 - ax_3 = b. \end{cases} \quad (*)$$

对方程组的增广矩阵施以初等行变换得

$$\left\{ \begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{array} \right\}.$$

当 $a \neq -1$ 或 $b \neq 0$ 时, 方程组 (*) 无解.

当 $a = -1, b = 0$ 时, 方程组 (*) 有解, 通解为

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \text{ 为任意常数}.$$

综上, 当且仅当 $a = -1, b = 0$ 时, 存在满足条件的矩阵 C , 且

$$C = \begin{pmatrix} 1+k_1+k_2 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \text{ 为任意常数}.$$

(21) 证 (I) 记 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, 由于

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2 \\ &= 2 \left[(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right] + \left[(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} (b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right] \\ &= 2x^T(\alpha\alpha^T)x + x^T(\beta\beta^T)x \\ &= x^T(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)x, \end{aligned}$$

又 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$ 为对称矩阵, 所以二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$.

(II) 记 $A = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$, 由于 α, β 正交且均为单位向量, 所以

$$A\alpha = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\alpha = 2\alpha, \quad A\beta = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\beta = \beta,$$

于是 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ 是矩阵 A 的特征值, 又

$$r(A) = r(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq r(2\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) \leq 2,$$

所以 $\lambda_3 = 0$ 是矩阵 A 的特征值, 故 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

(22) 解 (I) 由题设条件知, $P\{1 \leq Y \leq 2\} = 1$

记 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$, 则

当 $y < 1$ 时, $F_Y(y) = 0$,

当 $1 \leq y < 2$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\}$

$$= P\{Y = 1\} + P\{1 < Y \leq y\}$$

$$= \int_2^3 \frac{1}{9}x^2 dx + \int_1^y \frac{1}{9}x^2 dx$$

$$= \frac{y^3 + 18}{27}.$$

当 $y \geq 2$ 时, $F_Y(y) = 1$.

$$\text{所以 } Y \text{ 的分布函数为 } F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ \frac{y^3 + 18}{27}, & 1 \leq y < 2, \\ 1, & y \geq 2. \end{cases}$$

$$(II) P\{X \leq Y\} = P\{X < 2\} = \int_0^2 \frac{1}{9}x^2 dx = \frac{8}{27}.$$

$$(23) \text{ 解 (I) } EX = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\theta^2}{x^2} e^{-\frac{\theta}{x}} dx = \theta$$

所以 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = \bar{X}$, 其中 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

(II) 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为样本观测值, 似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^{2n}}{(x_1 x_2 \cdots x_n)^3} e^{-\theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}, & x_1, x_2, \dots, x_n > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\text{当 } x_1, x_2, \dots, x_n > 0 \text{ 时, } \ln L(\theta) = 2n \ln \theta - \theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - 3 \sum_{i=1}^n \ln x_i.$$

$$\text{令 } \frac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta} = \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = 0, \text{ 得 } \theta \text{ 的最大似然估计值为 } \hat{\theta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}.$$

$$\text{所以 } \theta \text{ 的最大似然估计量为 } \hat{\theta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}}.$$