

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题答案

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 设 $\cos x - 1 = x \sin \alpha(x)$ ，其中 $|\alpha(x)| < \frac{\pi}{2}$ ，则当 $x \rightarrow 0$ 时， $\alpha(x)$ 是 ()

- (A) 比 x 高阶的无穷小 (B) 比 x 低阶的无穷小
(C) 与 x 同阶但不等价的无穷小 (D) 与 x 等价的无穷小

【答案】(C)

【解析】因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$ ，所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \alpha(x) = 0$ ，

因此当 $x \rightarrow 0$ 时， $\alpha(x) \rightarrow 0$ ，所以 $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$ ，所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{x} = -\frac{1}{2}$ ，

所以 $\alpha(x)$ 是与 x 同阶但不等价的无穷小。

(2) 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $\cos(xy) + \ln y - x = 1$ 确定，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{2}{n}\right) - 1 \right] = ()$

- (A) 2 (B) 1 (C) -1 (D) -2

【答案】(A)

【解析】由于 $f(0) = 1$ ，所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{2}{n}\right) - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left[\frac{f\left(\frac{2}{n}\right) - f(0)}{\frac{2}{n}} \right] = 2f'(0)$ ，

对此隐函数两边求导得 $-(y + xy') \sin(xy) + \frac{y'}{y} - 1 = 0$ ，所以 $f'(0) = 1$ ，故 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{2}{n}\right) - 1 \right] = 2$ 。

(3) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \pi \\ 2, & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$ ， $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ，则 ()

- (A) $x = \pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点 (B) $x = \pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点
(C) $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处连续但不可导 (D) $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处可导

【答案】(C)

【解析】 $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} \int_0^x \sin t dt = 1 - \cos x, & 0 \leq x < \pi \\ \int_0^\pi \sin t dt + \int_\pi^x 2 dt = 2(x - \pi + 1), & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$ ，

由于 $\lim_{x \rightarrow \pi^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} (1 - \cos x) = 2$ ，所以 $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处连续；

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{F(x) - F(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-1 - \cos x}{x - \pi} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{F(x) - F(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{2(x - \pi)}{x - \pi} = 2,$$

所以 $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处不可导。

$$(4) \text{ 设函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < e \\ \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x}, & x \geq e \end{cases}, \text{ 若反常积分 } \int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛, 则 ()}$$

- (A) $\alpha < -2$ (B) $\alpha > 2$ (C) $-2 < \alpha < 0$ (D) $0 < \alpha < 2$

【答案】(D)

$$\text{【解析】 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < e \\ \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x}, & x \geq e \end{cases}$$

$$\text{因为 } \int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^e f(x) dx + \int_e^{+\infty} f(x) dx,$$

$$\text{当 } 1 < x < e \text{ 时, } \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1^+} \int_{\varepsilon}^e \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{2-\alpha} \frac{1}{(\varepsilon-1)^{\alpha-2}} \right] - \frac{1}{2-\alpha} \frac{1}{(e-1)^{\alpha-2}},$$

要使 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{2-\alpha} \frac{1}{(\varepsilon-1)^{\alpha-2}} \right]$ 存在, 需满足 $\alpha - 2 < 0$;

$$\text{当 } x \geq e \text{ 时, } \int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x} dx = \int_e^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln^{\alpha+1} x} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\alpha} \frac{1}{\ln^{\alpha} \lambda} \right) + \frac{1}{\alpha},$$

要使 $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\alpha} \frac{1}{\ln^{\alpha} \lambda} \right)$ 存在, 需满足 $\alpha > 0$; 所以 $0 < \alpha < 2$ 。

$$(5) \text{ 设 } z = \frac{y}{x} f(xy), \text{ 其中函数 } f \text{ 可微, 则 } \frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = (\quad)$$

- (A) $2yf'(xy)$ (B) $-2yf'(xy)$ (C) $\frac{2}{x} f(xy)$ (D) $-\frac{2}{x} f(xy)$

【答案】(A)

$$\text{【解析】 已知 } z = \frac{y}{x} f(xy), \text{ 所以 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} f(xy) + \frac{y^2}{x} f'(xy),$$

$$\text{所以 } \frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \left[-\frac{1}{x} f(xy) + yf'(xy) \right] + \left(\frac{1}{x} f(xy) + yf'(xy) \right) = 2yf'(xy)。$$

$$(6) \text{ 设 } D_k \text{ 是圆域 } D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ 在第 } k \text{ 象限的部分, 记 } I_k = \iint_{D_k} (y-x) dx dy (k=1, 2, 3, 4), \text{ 则}$$

()

- (A) $I_1 > 0$ (B) $I_2 > 0$ (C) $I_3 > 0$ (D) $I_4 > 0$

【答案】(B)

【解析】令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ，则有

$$I_k = \iint_{D_k} (y - x) dx dy = \int_0^1 r dr \int_{\alpha}^{\beta} (r \sin \theta - r \cos \theta) d\theta = -\frac{1}{3} (\cos \theta + \sin \theta) \Big|_{\alpha}^{\beta}$$

故当 $k = 2$ 时, $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \pi$, 此时有 $I_2 = \frac{2}{3} > 0$. 故正确答案选 B。

(7) 设矩阵 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB = C$, 且 C 可逆, 则 ()

- (A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价
(B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价
(C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价
(D) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的列向量组等价

【答案】(B)

【解析】由 $C = AB$ 可知 C 的列向量组可以由 A 的列向量组线性表示, 又 B 可逆, 故有 $A = CB^{-1}$, 从而 A 的列向量组也可以由 C 的列向量组线性表示, 故根据向量组等价的定义可知正确选项为 (B)。

(8) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为

- (A) $a = 0, b = 2$
(B) $a = 0, b$ 为任意常数
(C) $a = 2, b = 0$
(D) $a = 2, b$ 为任意常数

【答案】(B)

【解析】由于 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 为实对称矩阵, 故一定可以相似对角化, 从而 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的

充分必要条件为 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值为 $2, b, 0$ 。

又 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -a & -1 \\ -a & \lambda-b & -a \\ -1 & -a & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda[(\lambda-b)(\lambda-2)-2a^2]$, 从而 $a=0, b$ 为任意常数。

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 - \frac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $e^{\frac{1}{2}}$

【解析】 原式 = $e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\frac{\ln(1+x)}{x})}{x}}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\frac{\ln(1+x)}{x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\frac{\ln(1+x)}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-(1-\frac{1}{2}x+o(x))}{x} = \frac{1}{2}$$

因此答案为 $e^{\frac{1}{2}}$.

(10) 设函数 $f(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-e^t} dt$, 则 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数

$\frac{dx}{dy}|_{y=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$

【解析】 $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-e^x}, \therefore \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-e^x}}, \frac{dx}{dy}|_{y=0} = \frac{1}{\sqrt{1-e^x}}|_{x=-1} = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$

(11) 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r = \cos 3\theta (-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6})$, 则 L 所围成的平面图形的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{\pi}{12}$

【解析】 所围图形的面积是 $S = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 6\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{12}$

(12) 曲线 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $y + x - \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} = 0$

【解析】 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{1}{1+t^2}} = t, \quad \frac{dy}{dx} \Big|_{t=1} = 1,$

当 $t=1$ 时, $x = \frac{\pi}{4}, y = \ln \sqrt{2}$, 故法线方程为 $y + x - \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} = 0$.

(13) 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$, $y_2 = e^x - xe^{2x}$, $y_3 = -xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解,

该方程满足条件 $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1$ 的解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $y = e^{3x} - e^x - xe^{2x}$

【解析】由题意知: e^{3x}, e^x 是对应齐次方程的解, $-xe^{2x}$ 是非齐次方程的解,

故非齐次的通解为 $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x - xe^{2x}$, 将初始条件代入, 得到 $C_1 = 1, C_2 = -1$,

故满足条件的解为 $y = e^{3x} - e^x - xe^{2x}$ 。

(14) 设 $A = (a_{ij})$ 是三阶非零矩阵, $|A|$ 为 A 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若

$a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$, 则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案】 -1

【解析】

由 $a_{ij} + A_{ij} = 0$ 可知, $A^T = -A^*$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} \\ &= -\sum_{j=1}^3 a_{ij}^2 = -\sum_{i=1}^3 a_{ij}^2 < 0 \end{aligned}$$

从而有 $|A| = |A^T| = |-A^*| = -|A|^2$, 故 $|A| = -1$.

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小, 求 n 与 a 的值.

【解析】因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n} = 1$

又因为:

$$1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$$

$$= 1 - \cos x + \cos x - \cos x \cdot \cos 2x + \cos x \cdot \cos 2x - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$$

$$= 1 - \cos x + \cos x(1 - \cos 2x) + \cos x \cdot \cos 2x(1 - \cos 3x)$$

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \cos x(1 - \cos 2x) + \cos x \cdot \cos 2x(1 - \cos 3x)}{ax^n}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{ax^n} + \frac{\cos x(1 - \cos 2x)}{ax^n} + \frac{\cos x \cdot \cos 2x(1 - \cos 3x)}{ax^n} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{ax^n} + \frac{\frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2)}{ax^n} + \frac{\frac{1}{2}(3x)^2 + o(x^2)}{ax^n} \right)$$

$$\text{所以 } n=2 \text{ 且 } \frac{1}{2a} + \frac{4}{2a} + \frac{9}{2a} = 1 \Rightarrow a=7$$

(16) (本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y = x^{\frac{1}{3}}$, 直线 $x = a (a > 0)$ 及 x 轴所围成的平面图形, V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴, y 轴旋转一周所得旋转体的体积, 若 $V_y = 10V_x$, 求 a 的值。

【解析】由题意可得:

$$V_x = \pi \int_0^a (x^{\frac{1}{3}})^2 dx = \frac{3}{5} \pi a^{\frac{5}{3}}$$

$$V_y = 2\pi \int_0^a x \cdot x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{6\pi}{7} a^{\frac{7}{3}}$$

$$\text{因为: } V_y = 10V_x \text{ 所以 } \frac{6\pi}{7} a^{\frac{7}{3}} = 10 \cdot \frac{3}{5} \pi a^{\frac{5}{3}} \Rightarrow a = 7\sqrt{7}$$

(17) (本题满分 10 分)

设平面内区域 D 由直线 $x = 3y, y = 3x$ 及 $x + y = 8$ 围成. 计算 $\iint_D x^2 dx dy$ 。

$$\text{【解析】 } \iint_D x^2 dx dy = \iint_{D_1} x^2 dx dy + \iint_{D_2} x^2 dx dy$$

$$= \int_0^2 x^2 dx \int_{\frac{x}{3}}^{3x} dy + \int_2^6 x^2 dx \int_{\frac{x}{3}}^{8-x} dy$$

$$= \frac{416}{3}$$

(18) (本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1) = 1$. 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$; (II) 存在 $\eta \in (0,1)$, 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$ 。

【解析】(1) 令 $F(x)=f(x)-x, F(0)=f(0)=0, F(1)=f(1)-1=0$,

则 $\exists \xi \in (0,1)$ 使得 $F'(\xi)=0$, 即 $f'(\xi)=1$

(2) 令 $G(x)=e^x(f'(x)-1)$, 则 $G(\xi)=0$,

又由于 $f(x)$ 为奇函数, 故 $f'(x)$ 为偶函数, 可知 $G(-\xi)=0$,

则 $\exists \eta \in (-\xi, \xi) \subset (-1,1)$ 使 $G'(\eta)=0$,

即 $e^\eta[f'(\eta)-1]+e^\eta f''(\eta)=0$, 即 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$

(19) (本题满分 11 分)

求曲线 $x^3-xy+y^3=1(x \geq 0, y \geq 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离。

【解析】本题本质上是在条件 $x^3-xy+y^3=1(x \geq 0, y \geq 0)$ 下求函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 的最值。

故只需求出 $\sqrt{x^2+y^2}$ 在条件 $x^3-xy+y^3=1$ 下的条件极值点, 再将其与曲线端点处 $((0,1),(1,0))$ 的函数值比较, 即可得出最大值与最小值。

由于函数 $\sqrt{x^2+y^2}$ 与 x^2+y^2 的增减性一致, 故可以转化为求 x^2+y^2 的条件极值点:

构造拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x^3-xy+y^3-1)$, 求其驻点得

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 3\lambda x^2 - \lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 3\lambda y^2 - \lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^3 - xy + y^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

为了求解该方程组, 将前两个方程变形为 $\begin{cases} 2x = \lambda y - 3\lambda x^2 \\ 2y = \lambda x - 3\lambda y^2 \end{cases}$

进一步有 $\begin{cases} 2xy = \lambda y^2 - 3\lambda x^2 y \\ 2xy = \lambda x^2 - 3\lambda xy^2 \end{cases}$, 故 $\lambda x^2 - 3\lambda xy^2 = \lambda y^2 - 3\lambda x^2 y$

即 $\lambda(x-y)(x+y+3xy)=0$ 。则有 $\lambda=0$ 或 $x-y=0$ 或 $x+y+3xy=0$ 。

当 $\lambda=0$ 时, 有 $x=y=0$, 不可能满足方程 $x^3-xy+y^3-1=0$;

当 $x+y+3xy=0$ ，由于 $x \geq 0, y \geq 0$ ，也只能有 $x=y=0$ ，不可能满足第三个方程；

故必有 $x-y=0$ ，将其代入 $x^3-xy+y^3-1=0$ 得 $2x^3-x^2-1=0$ ，解得 $x=1, y=1$ 。

可知 $(1,1)$ 点是唯一的条件极值点。

由于 $f(1,1)=\sqrt{2}$ ， $f(0,1)=f(1,0)=\sqrt{2}$ ，故曲线 $x^3-xy+y^3=1(x \geq 0, y \geq 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离为 $\sqrt{2}$ 与最短距离为 1。

(20) (本题满分 11 分)

设函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ ，

(I) 求 $f(x)$ 的最小值

(II) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n + \frac{1}{x_n} < 1$ ，证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在，并求此极限。

【解析】(I) $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$ ，则当 $x \in (0,1)$ 时， $f'(x) < 0$ ；当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $f'(x) > 0$ 。

可知 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，在 $[1, +\infty)$ 上单调递增。故 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=1$ 。

(2)、由于 $\ln x_n + \frac{1}{x_n} \geq 1$ ，则 $\frac{1}{x_{n+1}} < \frac{1}{x_n}$ ，即 $x_{n+1} > x_n$ ，故 x_n 单调递增。

又由于 $\ln x_n < \ln x_n + \frac{1}{x_n} < 1$ ，则 $x_n < e$ ，故 x_n 有上界，则由单调有界收敛定理可知， $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在。

令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln x_n + \frac{1}{x_n} \right) = \ln a + \frac{1}{a}$ ，由于 $\ln x_n + \frac{1}{x_n} < 1$ ，则

$\ln a + \frac{1}{a} \leq 1$ ，故 $a=1$ 。

(21) (本题满分 11 分)

设曲线 L 的方程为 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ ($1 \leq x \leq e$)，

(1) 求 L 的弧长；

(2) 设 D 是由曲线 L ，直线 $x=1, x=e$ 及 x 轴所围平面图形，求 D 的形心的横坐标。

【解析】(1) 由弧长的计算公式得 L 的弧长为

$$\int_1^e \sqrt{1 + \left[\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x \right)' \right]^2} dx = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x} \right)^2} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^e \sqrt{1 + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4x} - \frac{1}{2}} dx \\
&= \int_1^e \sqrt{\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)^2} dx \\
&= \frac{e^2 + 1}{4}
\end{aligned}$$

(2) 由形心的计算公式可得, D 的形心的横坐标为

$$\frac{\int_1^e x \left(\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} \ln x \right) dx}{\int_1^e \left(\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} \ln x \right) dx} = \frac{3(e^4 - 2e^2 - 3)}{4(e^3 - 7)}$$

(22) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C 使得 $AC - CA = B$, 并求所有矩阵 C 。

【解析】由题意可知矩阵 C 为 2 阶矩阵, 故可设 $C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, 则由 $AC - CA = B$ 可得线性方程组:

$$\begin{cases} -x_2 + ax_3 = 0 \\ -ax_1 + x_2 + ax_4 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - ax_3 = b \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a \\ 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1-a \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

由于方程组 (1) 有解, 故有 $1+a=0, b-1-a=0$, 即 $a=-1, b=0$, 从而有

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 故有 } \begin{cases} x_1 = k_1 + k_2 + 1 \\ x_2 = -k_1 \\ x_3 = k_1 \\ x_4 = k_2 \end{cases}, \text{ 其中 } k_1, k_2 \text{ 任意.}$$

从而有 $C = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + 1 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$

(23) (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ 。

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha^T\alpha + \beta^T\beta$;

(II) 若 α, β 正交且均为单位向量, 证明二次型 f 在正交变化下的标准形为二次型 $2y_1^2 + y_2^2$ 。

【解析】(1)

$$f = (2a_1^2 + b_1^2)x_1^2 + (2a_2^2 + b_2^2)x_2^2 + (2a_3^2 + b_3^2)x_3^2 + (4a_1a_2 + 2b_1b_2)x_1x_2 \\ + (4a_1a_3 + b_1b_3)x_1x_3 + (4a_2a_3 + 2b_2b_3)x_2x_3$$

$$\text{则 } f \text{ 的矩阵为 } \begin{pmatrix} 2a_1^2 + b_1^2 & 2a_1a_2 + b_1b_2 & 2a_1a_3 + b_1b_3 \\ 2a_1a_2 + b_1b_2 & 2a_2^2 + b_2^2 & 2a_2a_3 + b_2b_3 \\ 2a_1a_3 + b_1b_3 & 2a_2a_3 + b_2b_3 & 2a_3^2 + b_3^2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_1b_2 & b_2^2 & b_2b_3 \\ b_1b_3 & b_2b_3 & b_3^2 \end{pmatrix} \\ = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$$

(2) 令 $A = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$, 则 $A\alpha = 2\alpha\alpha^T\alpha + \beta\beta^T\alpha = 2\alpha, A\beta = 2\alpha\alpha^T\beta + \beta\beta^T\beta = \beta$, 则 1, 2 均为 A 的特征值, 又由于 $r(A) = r(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq r(\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) = 2$, 故 0 为 A 的特征值, 则三阶矩阵 A 的特征值为 2, 1, 0, 故 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$