

2010 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题参考答案

一、选择题

(1) 【答案】 (C).

【解析】

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - a \right) e^x \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (1 - e^x (1 - ax)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (1 - e^x + axe^x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^x}{x} + \frac{axe^x}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{axe^x}{x} = -1 + a = 1\end{aligned}$$

所以 $a = 2$.

(2) 【答案】 (A).

【解析】 因 $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是 $y' + P(x)y = 0$ 的解, 故 $(\lambda y_1 - \mu y_2)' + P(x)(\lambda y_1 - \mu y_2) = 0$, 所以

$$\lambda [y_1' + P(x)y_1] - \mu [y_2' + P(x)y_2] = 0,$$

而由已知 $y_1' + P(x)y_1 = q(x)$, $y_2' + P(x)y_2 = q(x)$, 所以

$$(\lambda - \mu)q(x) = 0, \quad \text{①}$$

又由于一阶次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 是非齐的, 由此可知 $q(x) \neq 0$, 所以

$$\lambda - \mu = 0.$$

由于 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是非齐次微分方程 $y' + P(x)y = q(x)$ 的解, 所以

$$(\lambda y_1 + \mu y_2)' + P(x)(\lambda y_1 + \mu y_2) = q(x),$$

整理得

$$\lambda [y_1' + P(x)y_1] + \mu [y_2' + P(x)y_2] = q(x),$$

即

$$(\lambda + \mu)q(x) = q(x), \text{ 由 } q(x) \neq 0 \text{ 可知 } \lambda + \mu = 1, \quad \text{②}$$

由①②求解得 $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, 故应选 (A).

(3) 【答案】 (B).

【解析】 $\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)] \cdot g'(x),$

$$\{f[g(x)]\}'' = \{f'[g(x)] \cdot g'(x)\}' = f''[g(x)] \cdot [g'(x)]^2 + f'[g(x)] \cdot g''(x)$$

由于 $g(x_0) = a$ 是 $g(x)$ 的极值, 所以 $g'(x_0) = 0$. 所以

$$\{f[g(x_0)]\}'' = f'[g(x_0)] \cdot g''(x_0) = f'(a) \cdot g''(x_0)$$

由于 $g''(x_0) < 0$, 要使 $\{f[g(x)]\}'' < 0$, 必须有 $f'(a) > 0$, 故答案为 B.

(4) 【答案】 (C).

【解析】 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{10}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{10}} \frac{1}{10} = +\infty$, 所以, 当 x 充分大时, $h(x) > g(x)$.

$$\begin{aligned} \text{又因为 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{10} x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 10 \frac{\ln^9 x \cdot \frac{1}{x}}{1} = 10 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^9 x}{x} \\ &= 10 \cdot 9 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^8 x \cdot \frac{1}{x}}{1} = \dots = 10 \cdot 9 \dots 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 10! \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0. \end{aligned}$$

所以当 x 充分大时, $f(x) < g(x)$, 故当 x 充分大, $f(x) < g(x) < h(x)$.

(5) 【答案】 (A).

【解析】 由于向量组 I 能由向量组 II 线性表示, 所以 $r(I) \leq r(II)$, 即

$$r(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \leq r(\beta_1, \dots, \beta_s) \leq s$$

若向量组 I 线性无关, 则 $r(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = r$, 所以 $r = r(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \leq r(\beta_1, \dots, \beta_s) \leq s$, 即 $r \leq s$, 选 (A).

(6) 【答案】 (D).

【解析】 设 λ 为 A 的特征值, 由于 $A^2 + A = O$, 所以 $\lambda^2 + \lambda = 0$, 即 $(\lambda + 1)\lambda = 0$, 这样 A 的特征值只能为 -1 或 0 . 由于 A 为实对称矩阵, 故 A 可相似对角化, 即

$$A \sim \Lambda, r(A) = r(\Lambda) = 3, \text{ 因此, } \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \text{ 即 } A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

(7) 【答案】 (C).

【解析】 离散型随机变量的分布函数是跳跃的阶梯形分段函数, 连续型随机变量的分布函数是连续函数. 观察本题中 $F(x)$ 的形式, 得到随机变量 X 既不是离散型随机变量, 也不是连续型随机变量, 所以求随机变量在一点处的概率, 只能利用分布函数的定义. 根据分布函数的定义, 函数在某一点的概率可以写成两个区间内概率的差, 即

$$P\{X=1\} = P\{X \leq 1\} - P\{X < 1\} = F(1) - F(1-0) = 1 - e^{-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{-1}, \text{ 故本题选}$$

(C).

(8) 【答案】 (A).

【解析】根据题意知, $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ($-\infty < x < +\infty$), $f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

利用概率密度的性质: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$, 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 a f_1(x) dx + \int_0^{+\infty} b f_2(x) dx = \frac{a}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx + b \int_0^3 \frac{1}{4} dx = \frac{a}{2} + \frac{3}{4} b = 1$$

所以整理得到 $2a + 3b = 4$, 故本题应选 (A).

二、填空题

(9) 【答案】 -1.

【解析】 $\int_0^{x+y} e^{-t^2} dt = x \int_0^x \sin t^2 dt$, 令 $x = 0$, 得 $y = 0$, 等式两端对 x 求导:

$$e^{-(x+y)^2} \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = \int_0^x \sin t^2 dt + x \sin x^2.$$

将 $x = 0$, $y = 0$ 代入上式, 得 $1 + \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = 0$. 所以 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = -1$.

(10) 【答案】 $\frac{\pi^2}{4}$.

【解析】根据绕 x 轴旋转公式, 有

$$\begin{aligned} V &= \int_e^{+\infty} \pi y^2 dx = \int_e^{+\infty} \pi \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} \\ &= \pi \int_e^{+\infty} \frac{d \ln x}{1+\ln^2 x} = \pi \cdot [\arctan(\ln x)]_e^{+\infty} = \pi \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

(11) 【答案】 $p \cdot e^{\frac{1}{3}(p^3-1)}$.

【解析】由弹性的定义, 得 $\frac{dR}{dp} \cdot \frac{p}{R} = 1 + p^3$, 所以 $\frac{dR}{R} = \left(\frac{1}{p} + p^2 \right) dp$, 即 $\ln R = \ln p + \frac{1}{3} p^3 + C$,

又 $R(1) = 1$, 所以 $C = -\frac{1}{3}$. 故 $\ln R = \ln p + \frac{1}{3} p^3 - \frac{1}{3}$, 因此 $R = p \cdot e^{\frac{1}{3}(p^3-1)}$.

(12) 【答案】 $b = 3$.

【解析】函数为 $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$, 它的一阶导数为 $y' = 3x^2 + 2ax + b$; 二阶导数为

$y'' = 6x + 2a$, 又因为 $(-1, 0)$ 是拐点, 所以 $y'' \Big|_{x=-1} = 0$, 得 $-\frac{a}{3} = -1$, 所以 $a = 3$, 又因为曲线

过点 $(-1, 0)$, 所以将 $x = -1, y = 0$ 代入曲线方程, 得 $b = 3$.

(13) 【答案】 3.

【解析】 由于 $A(A^{-1} + B)B^{-1} = (E + AB)B^{-1} = B^{-1} + A$, 所以

$$|A + B^{-1}| = |A(A^{-1} + B)B^{-1}| = |A| |A^{-1} + B| |B^{-1}|$$

因为 $|B| = 2$, 所以 $|B^{-1}| = |B|^{-1} = \frac{1}{2}$, 因此

$$|A + B^{-1}| = |A| |A^{-1} + B| |B^{-1}| = 3 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3.$$

(14) 【答案】 $\sigma^2 + \mu^2$.

【解析】 $E(T) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \frac{1}{n} n E(X^2) = E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$.

三、解答题

$$(15) \text{ 【解析】 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{\frac{1}{x}} - 1\right)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln\left(\frac{1}{x^x - 1}\right)}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x^x - 1}\right)}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1\right)}{\ln x}}$$

其中

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1)^{-1} e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{\ln x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} \left(\frac{1}{\ln x} - 1\right) = -1.$$

故原式 = e^{-1} .

(16) 【解析】 积分区域 $D = D_1 \cup D_2$, 其中 $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, \sqrt{2}y \leq x \leq \sqrt{1+y^2}\}$

$$D_2 = \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 0, -\sqrt{2}y \leq x \leq \sqrt{1+y^2}\}$$

$$\iint_D (x+y)^3 dx dy = \iint_D (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) dx dy$$

因为区域 D 关于 x 轴对称, 被积函数 $3x^2y + y^3$ 是 y 的奇函数, 所以

$$\iint_D (3x^2y + y^3) dx dy = 0.$$

$$\iint_D (x+y)^3 dx dy = \iint_D (x^3 + 3xy^2) dx dy = 2 \iint_{D_1} (x^3 + 3xy^2) dx dy = 2 \left[\int_0^1 dy \int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}} (x^3 + 3xy^2) dx \right]$$

$$= 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{4} x^4 + \frac{3}{2} x^2 y^2 \right) \Big|_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}} dy = 2 \int_0^1 \left(-\frac{9}{4} y^4 + 2y^2 + \frac{1}{4} \right) dy = \frac{14}{15}.$$

(17) 【解析】 令 $F(x, y, z, \lambda) = xy + 2yz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 10)$, 用拉格朗日乘数法得

$$\begin{cases} F'_x = y + 2\lambda x = 0, \\ F'_y = x + 2z + 2\lambda y = 0, \\ F'_z = 2y + 2\lambda z = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0, \end{cases}$$

求解得六个点： $A(1, \sqrt{5}, 2), B(-1, -\sqrt{5}, -2),$
 $C(1, -\sqrt{5}, 2), D(-1, \sqrt{5}, -2),$
 $E(2\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}), F(-2\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}).$

由于在点 A 与 B 点处, $u = 5\sqrt{5}$; 在点 C 与 D 处, $u = -5\sqrt{5}$; 在点 E 与 F 处, $u = 0$.

又因为该问题必存在最值, 并且不可能在其它点处, 所以 $u_{\max} = 5\sqrt{5}, u_{\min} = -5\sqrt{5}$.

(18) 【解析】 (I) 当 $0 < x < 1$ 时 $0 < \ln(1+x) < x$, 故 $[\ln(1+t)]^n < t^n$, 所以

$$|\ln t| [\ln(1+t)]^n < |\ln t| t^n,$$

则

$$\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt < \int_0^1 |\ln t| t^n dt \quad (n=1, 2, \dots).$$

$$(II) \int_0^1 |\ln t| t^n dt = -\int_0^1 \ln t \cdot t^n dt = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \ln t d(t^{n+1}) = \frac{1}{(n+1)^2}, \text{ 故由}$$

$$0 < u_n < \int_0^1 |\ln t| t^n dt = \frac{1}{(n+1)^2},$$

根据夹逼定理得 $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

(19) 【解析】 (I) 因为 $2f(0) = \int_0^2 f(x)dx$, 又因为 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 所以由积分中值定理得, 至少有一点 $\eta \in [0, 2]$, 使得

$$\int_0^2 f(x)dx = f(\eta) \cdot (2-0)$$

即 $2f(0) = 2f(\eta)$, 所以存在 $\eta \in [0, 2]$, 使得 $f(\eta) = f(0)$.

(II) 因为 $f(2) + f(3) = 2f(0)$, 即 $\frac{f(2)+f(3)}{2} = f(0)$, 又因为 $f(x)$ 在 $[2, 3]$ 上连

续, 由介值定理知, 至少存在一点 $\eta_1 \in [2, 3]$ 使得 $f(\eta_1) = f(0)$.

因为 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $[0, 2]$ 上可导, 且 $f(0) = f(2)$, 所以由罗尔中值定

理知, C 存在 $\xi_1 \in (0, 2)$, 有 $f'(\xi_1) = 0$.

又因为 $f(x)$ 在 $[2, \eta_1]$ 上连续, 在 $(2, \eta_1)$ 上可导, 且 $f(2) = f(0) = f(\eta_1)$, 所以由罗尔中值定理知, 存在 $\xi_2 \in (2, \eta_1)$, 有 $f'(\xi_2) = 0$.

又因为 $f(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上二阶可导, 且 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$, 所以由罗尔中值定理, 至少有一点 $Ax = b \subset (0, 3)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

(20) 【解析】因为方程组有两个不同的解, 所以可以判断方程组增广矩阵的秩小于 3, 进而可以通过秩的关系求解方程组中未知参数, 有以下两种方法.

方法 1: (I) 已知 $Ax = b$ 有 2 个不同的解, 故 $r(A) = r(\bar{A}) < 3$, 对增广矩阵进行初等行变换, 得

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & a \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & a \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & a-\lambda \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1 \end{array} \right)\end{aligned}$$

当 $\lambda = 1$ 时, $\bar{A} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$, 此时, $r(A) \neq r(\bar{A})$, 故 $Ax = b$ 无解 (舍去).

当 $\lambda = -1$ 时, $\bar{A} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array} \right)$, 由于 $r(A) = r(\bar{A}) < 3$, 所以 $a = -2$, 故 $\lambda = -1$, $a = -2$.

方法 2: 已知 $Ax = b$ 有 2 个不同的解, 故 $r(A) = r(\bar{A}) < 3$, 因此 $|A| = 0$, 即

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0,$$

知 $\lambda = 1$ 或 -1 .

当 $\lambda = 1$ 时, $r(A) = 1 \neq r(\bar{A}) = 2$, 此时, $Ax = b$ 无解, 因此 $\lambda = -1$. 由 $r(A) = r(\bar{A})$, 得 $a = -2$.

(II) 对增广矩阵做初等行变换

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

可知原方程组等价于 $\begin{cases} x_1 - x_3 = \frac{3}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$, 写成向量的形式, 即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

因此 $Ax = b$ 的通解为 $x = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中 k 为任意常数.

(21) 【解析】由于 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$, 存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q$ 为对角阵, 且 Q 的第一

列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$, 故 A 对应于 λ_1 的特征向量为 $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$.

根据特征值和特征向量的定义, 有 $A \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, 即

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 由此可得 } a = -1, \lambda_1 = 2. \text{ 故 } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{由 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -4 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 \\ -4 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 4)(\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0,$$

可得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -4, \lambda_3 = 5$.

由 $(\lambda_2 E - A)x = 0$, 即 $\begin{pmatrix} -4 & 1 & -4 \\ 1 & -7 & 1 \\ -4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$, 可解得对应于 $\lambda_2 = -4$ 的线性无关的

特征向量为 $\xi_2 = (-1, 0, 1)^T$.

由 $(\lambda_3 E - A)x = 0$, 即 $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$, 可解得对应于 $\lambda_3 = 5$ 的特征向量为

$\xi_3 = (1, -1, 1)^T$.

由于 A 为实对称矩阵, ξ_1, ξ_2, ξ_3 为对应于不同特征值的特征向量, 所以 ξ_1, ξ_2, ξ_3 相互正交, 只需单位化:

$$\eta_1 = \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T, \eta_2 = \frac{\xi_2}{\|\xi_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T, \eta_3 = \frac{\xi_3}{\|\xi_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T,$$

$$\text{取 } Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \text{ 则 } Q^T A Q = \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -4 & \\ & & 5 \end{pmatrix}.$$

(22) 【解析】当给出二维正态随机变量的的概率密度 $f(x, y)$ 后, 要求条件概率密度

$f_{Y|X}(y|x)$, 可以根据条件概率公式 $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$ 来进行计算. 本题中还有待定参

数, A 要根据概率密度的性质求解, 具体方法如下.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2 + 2xy - y^2} dy = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2 - x^2} dy = A e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} dy \\ &= A \sqrt{\pi} e^{-x^2}, -\infty < x < +\infty. \end{aligned}$$

根据概率密度性质有

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = A \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = A \pi, \text{ 即 } A = \pi^{-1},$$

故 $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, -\infty < x < +\infty$.

当 $-\infty < x < +\infty$ 时, 有条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{A e^{-2x^2 + 2xy - y^2}}{A \sqrt{\pi} e^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2 + 2xy - y^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(y-x)^2}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty.$$

(23) 【解析】(I) X 的所有可能取值为 0,1, Y 的所有可能取值为 0,1,2.

$$P\{X=0, Y=0\} = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}, \text{ 其中 } X=0, Y=0 \text{ 表示取到的两个球都是黑球;}$$

$$P\{X=0, Y=1\} = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_6^2} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}, \text{ 其中 } X=0, Y=1 \text{ 表示取到的一个是白球, 一个是}$$

黑球;

$$P\{X=0, Y=2\} = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}, \text{ 其中 } X=0, Y=2 \text{ 表示取到的两个球都是白球;}$$

$$P\{X=1, Y=0\} = \frac{C_1^1 C_3^1}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}, \text{ 其中 } X=1, Y=0 \text{ 表示取到的一个是红球, 一个是}$$

黑球;

$$P\{X=1, Y=1\} = \frac{C_1^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{2}{15}, \text{ 其中 } X=1, Y=1 \text{ 表示取到的一个是红球, 一个是白球;}$$

$$P\{X=1, Y=2\} = \frac{0}{C_6^2} = 0,$$

因此二维离散型随机变量 (X, Y) 的概率分布为

随机变量 (X, Y) 的概率分布:

$\begin{matrix} Y \\ \backslash \\ X \end{matrix}$	0	1
0	$\frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15}$	$\frac{C_3^1}{C_6^2} = \frac{3}{15}$
1	$\frac{C_2^1 C_3^1}{C_6^2} = \frac{6}{15}$	$\frac{C_2^1}{C_6^2} = \frac{2}{15}$
2	$\frac{1}{C_6^2} = \frac{1}{15}$	0

2、

$$E(X) = 1 \times \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$E(Y) = 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{2}{3}$$

$$E(XY) = \frac{2}{15} \times 1 = \frac{2}{15}$$

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$= \frac{2}{15} - \frac{2}{9} = -\frac{2}{45}$$