

2008 年考研数学（三）真题解析

一、选择题

(1) 【答案】 B

【详解】 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0),$

所以 $x=0$ 是函数 $g(x)$ 的可去间断点.

(2) 【答案】 C

【详解】 $\int_0^a xf'(x) dx = \int_0^a x df(x) = xf(x) \Big|_0^a - \int_0^a f(x) dx = af(a) - \int_0^a f(x) dx$

其中 $af(a)$ 是矩形 $ABOC$ 面积, $\int_0^a f(x) dx$ 为曲边梯形 $ABOD$ 的面积, 所以 $\int_0^a xf'(x) dx$ 为曲边三角形的面积.

(3) 【答案】 B

【详解】 $f'_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{x^2+0^4}} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{|x|} - 1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{|x|} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{|x|} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x} - 1}{x} = -1$$

故 $f'_x(0,0)$ 不存在.

$$f'_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{0^2+y^4}} - 1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{y^2} - 1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{y} = 0$$

所以 $f'_y(0,0)$ 存在. 故选 B.

(4) 【答案】 A

【详解】 用极坐标得 $F(u,v) = \iint_D \frac{f(u^2+v^2)}{\sqrt{u^2+v^2}} du dv = \int_0^v dv \int_1^u \frac{f(r^2)}{r} r dr = v \int_1^u f(r^2) dr$

所以 $\frac{\partial F}{\partial u} = vf(u^2).$

(5) 【答案】 C

【详解】 $(E-A)(E+A+A^2) = E - A^3 = E, \quad (E+A)(E-A+A^2) = E + A^3 = E.$

故 $E-A, E+A$ 均可逆.

(6) 【答案】 D

【详解】 记 $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $|\lambda E - D| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 4,$

$$\text{又 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4,$$

所以 A 和 D 有相同的特征多项式, 所以 A 和 D 有相同的特征值.

又 A 和 D 为同阶实对称矩阵, 所以 A 和 D 相似. 由于实对称矩阵相似必合同, 故 D 正确.

(7) 【答案】 A

【详解】 $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P\{\max\{X, Y\} \leq z\} = P(X \leq z)P(Y \leq z) = F_Z(z)F_Z(z) = F_Z^2(z).$

(8) 【答案】 D

【详解】 用排除法. 设 $Y = aX + b$, 由 $\rho_{XY} = 1$, 知道 X, Y 正相关, 得 $a > 0$, 排除 (A) 、 (C)

由 $X \sim N(0, 1), Y \sim N(1, 4)$, 得 $EX = 0, EY = 1$,

所以 $E(Y) = E(aX + b) = aEX + b = a \times 0 + b = 1$, 所以 $b = 1$. 排除 (B) . 故选择 (D) .

二、填空题

(9) 【答案】 1

【详解】 由题设知 $c \geq |x| \geq 0$, 所以 $f(x) = \begin{cases} 2/x, & x > c \\ x^2 + 1, & -c \leq x \leq c \\ -2/x, & x < -c \end{cases}$

因为 $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} (x^2 + 1) = c^2 + 1$, $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{2}{x} = \frac{2}{c}$

又因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, $f(x)$ 必在 $x = c$ 处连续

所以 $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$, 即 $c^2 + 1 = \frac{2}{c} \Rightarrow c = 1$.

(10) 【答案】 $\frac{1}{2} \ln 3$

【详解】 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x} + x}{\frac{1}{x^2} + x^2} = \frac{\frac{1}{x} + x}{\left(\frac{1}{x} + x\right)^2 - 2}$, 令 $t = \frac{1}{x} + x$, 得 $f(t) = \frac{t}{t^2 - 2}$

所以 $\int_2^{2\sqrt{2}} f(x) dx = \int_2^{2\sqrt{2}} \frac{x}{x^2 - 2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2) \Big|_2^{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} (\ln 6 - \ln 2) = \frac{1}{2} \ln 3$.

(11) 【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【详解】 $\iint_D (x^2 - y) dx dy$ 利用函数奇偶性 $\iint_D x^2 dx dy = \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 r dr = \frac{\pi}{4}.$$

(12) 【答案】 $y = \frac{1}{x}$

【详解】由 $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$, 两端积分得 $-\ln|y| = \ln|x| + C_1$, 所以 $\frac{1}{|y|} = |x| + C$, 又 $y(1) = 1$, 所以 $y = \frac{1}{x}$.

(13) 【答案】 3

【详解】 A 的特征值为 $1, 2, 2$, 所以 A^{-1} 的特征值为 $1, 1/2, 1/2$,

所以 $4A^{-1} - E$ 的特征值为 $4 \times 1 - 1 = 3$, $4 \times 1/2 - 1 = 1$, $4 \times 1/2 - 1 = 1$

所以 $|4B^{-1} - E| = 3 \times 1 \times 1 = 3$.

(14) 【答案】 $\frac{1}{2}e^{-1}$

【详解】由 $DX = EX^2 - (EX)^2$, 得 $EX^2 = DX + (EX)^2$, 又因为 X 服从参数为 1 的泊松分布, 所以

$$DX = EX = 1, \text{ 所以 } EX^2 = 1 + 1 = 2, \text{ 所以 } P\{X = 2\} = \frac{1^2}{2!}e^{-1} = \frac{1}{2}e^{-1}.$$

三、解答题

(15) 【详解】

方法一: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \left(1 + \frac{\sin x}{x} - 1 \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}$$

方法二: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}$ 洛必达法则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{2x^2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{2x^3}$

$$\text{洛必达法则} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{6x^2} = -\frac{1}{6}$$

(16) 【详解】(I) $2xdx + 2ydy - dz = \varphi'(x + y + z) \cdot (dx + dy + dz)$

$$\Rightarrow (\varphi' + 1)dz = (-\varphi' + 2x)dx + (-\varphi' + 2y)dy$$

$$\Rightarrow dz = \frac{(-\varphi' + 2x)dx + (-\varphi' + 2y)dy}{\varphi' + 1} (\because \varphi' \neq -1)$$

(II) 由上一问可知 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\varphi' + 2x}{\varphi' + 1}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\varphi' + 2y}{\varphi' + 1},$

所以 $u(x, y) = \frac{1}{x-y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{1}{x-y} \left(\frac{-\varphi' + 2x}{\varphi' + 1} - \frac{-\varphi' + 2y}{\varphi' + 1} \right) = \frac{1}{x-y} \cdot \frac{-2y + 2x}{\varphi' + 1} = \frac{2}{\varphi' + 1}$

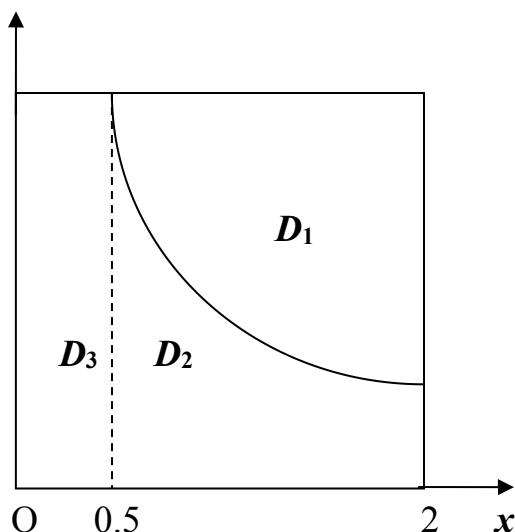
$$\text{所以 } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-2\varphi''(1+\frac{\partial z}{\partial x})}{(\varphi'+1)^2} = -\frac{2\varphi''(1+\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'})}{(\varphi'+1)^2} = -\frac{2\varphi''(1+\varphi'+2x-\varphi')}{(\varphi'+1)^3} = -\frac{2\varphi''(1+2x)}{(\varphi'+1)^3}.$$

(17) 【详解】 曲线 $xy=1$ 将区域分成两

个区域 D_1 和 D_2+D_3 ，为了便于计算继续对

区域分割，最后为

$$\begin{aligned} & \iint_D \max(xy, 1) dx dy \\ &= \iint_{D_1} xy dx dy + \iint_{D_2} dx dy + \iint_{D_3} dx dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^2 1 dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_0^{\frac{1}{x}} 1 dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 xy dy \\ &= 1 + 2 \ln 2 + \frac{15}{4} - \ln 2 \\ &= \frac{19}{4} + \ln 2 \end{aligned}$$



(18) 【详解】

方法一：(I) 由积分的性质知对任意的实数 t ，

$$\int_t^{t+2} f(x) dx = \int_t^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + \int_2^{t+2} f(x) dx$$

$$\text{令 } x = 2 + u, \text{ 则 } \int_2^{t+2} f(x) dx = \int_0^t f(2+u) du = \int_0^t f(u) du = -\int_t^0 f(x) dx$$

$$\text{所以 } \int_t^{t+2} f(x) dx = \int_t^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx - \int_t^0 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx$$

(II) 由(I)知，对任意的 t 有 $\int_2^{t+2} f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx$ ，记 $a = \int_0^2 f(x) dx$ ，则

$$G(x) = 2 \int_0^x f(u) du - ax. \text{ 所以，对任意的 } x,$$

$$G(x+2) - G(x) = 2 \int_0^{x+2} f(u) du - a(x+2) - 2 \int_0^x f(u) du + ax$$

$$= 2 \int_x^{x+2} f(u) du - 2a = 2 \int_0^2 f(u) du - 2a = 0$$

所以 $G(x)$ 是周期为 2 的周期函数.

方法二：(I) 设 $F(t) = \int_t^{t+2} f(x) dx$ ，由于 $F'(t) = f(t+2) - f(t) = 0$ ，所以 $F(t)$ 为常数，从而有 $F(t) = F(0)$.

$$\text{而 } F(0) = \int_0^2 f(x) dx, \text{ 所以 } F(t) = \int_0^2 f(x) dx, \text{ 即 } \int_t^{t+2} f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx.$$

(II) 由(I)知，对任意的 t 有 $\int_2^{t+2} f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx$ ，记 $a = \int_0^2 f(x) dx$ ，则

$$G(x) = 2 \int_0^x f(u) du - ax, \quad G(x+2) = 2 \int_0^{x+2} f(u) du - a(x+2)$$

由于对任意 x , $(G(x+2))' = 2f(x+2) - a = 2f(x) - a$, $(G(x))' = 2f(x) - a$

所以 $(G(x+2) - G(x))' = 0$, 从而 $G(x+2) - G(x)$ 是常数

即有 $G(x+2) - G(x) = G(2) - G(0) = 0$

所以 $G(x)$ 是周期为 2 的周期函数.

(19) 【详解】

方法一: 设 A_n 为用于第 n 年提取 $(10+9n)$ 万元的贴现值, 则

$$A_n = (1+r)^{-n}(10+9n)$$

$$\text{故 } A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10+9n}{(1+r)^n} = 10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n}{(1+r)^n} = 200 + 9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+r)^n}$$

$$\text{设 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \quad x \in (-1, 1)$$

$$\text{因为 } S(x) = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = x \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2} \quad x \in (-1, 1)$$

$$\text{所以 } S\left(\frac{1}{1+r}\right) = S\left(\frac{1}{1.05}\right) = 420 \text{ (万元)}$$

故 $A = 200 + 9 \times 420 = 3980$ (万元), 即至少应存入 3980 万元.

方法二: 设第 t 年取款后的余款是 y_t , 由题意知 y_t 满足方程

$$y_t = (1+0.05)y_{t-1} - (10+9t), \quad \text{即 } y_t - 1.05y_{t-1} = -(10+9t) \quad (1)$$

$$(1) \text{ 对应的齐次方程 } y_t - 1.05y_{t-1} = 0 \text{ 的通解为 } y_t = C(1.05)^t$$

$$\text{设 (1) 的通解为 } y_t^* = at + b, \text{ 代入 (1) 解得 } a = 180, \quad b = 3980$$

$$\text{所以 (1) 的通解为 } y_t = C(1.05)^t + 180t + 3980$$

$$\text{由 } y_0 = A, \quad y_t \geq 0 \text{ 得 } A = C + 3980 \quad C \geq 0$$

故 A 至少为 3980 万元.

(20) 【详解】(I)

证法一:

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - \frac{1}{2}ar_1} \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ 0 & \frac{3a}{2} & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix} = \dots \\
&\xrightarrow{r_n - \frac{n-1}{n}ar_{n-1}} \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ 0 & \frac{3a}{2} & 1 & & \\ & 0 & \frac{4a}{3} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 & \frac{(n+1)a}{n} \end{vmatrix} = 2a \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{4a}{3} \cdots \frac{(n+1)a}{n} = (n+1)a^n
\end{aligned}$$

证法二：记 $D_n = |A|$ ，下面用数学归纳法证明 $D_n = (n+1)a^n$ 。

当 $n=1$ 时， $D_1 = 2a$ ，结论成立。

当 $n=2$ 时， $D_2 = \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix} = 3a^2$ ，结论成立。

假设结论对小于 n 的情况成立。将 D_n 按第 1 行展开得

$$\begin{aligned}
D_n &= 2aD_{n-1} - \begin{vmatrix} a^2 & 1 & & & \\ 0 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix} \\
&= 2aD_{n-1} - a^2D_{n-2} = 2ana^{n-1} - a^2(n-1)a^{n-2} = (n+1)a^n
\end{aligned}$$

故 $|A| = (n+1)a^n$

证法三：记 $D_n = |A|$ ，将其按第一列展开得 $D_n = 2aD_{n-1} - a^2D_{n-2}$ ，

所以 $D_n - aD_{n-1} = aD_{n-1} - a^2D_{n-2} = a(D_{n-1} - aD_{n-2})$

$$= a^2(D_{n-2} - aD_{n-3}) = \cdots = a^{n-2}(D_2 - aD_1) = a^n$$

$$\begin{aligned}
\text{即 } D_n &= a^n + aD_{n-1} = a^n + a(a^{n-1} + aD_{n-2}) = 2a^n + a^2D_{n-2} \\
&= \cdots = (n-2)a^n + a^{n-2}D_2 = (n-1)a^n + a^{n-1}D_1 \\
&= (n-1)a^n + a^{n-1} \cdot 2a = (n+1)a^n
\end{aligned}$$

(II) 因为方程组有唯一解, 所以由 $Ax = B$ 知 $|A| \neq 0$, 又 $|A| = (n+1)a^n$, 故 $a \neq 0$.

由克莱姆法则, 将 D_n 的第 1 列换成 b , 得行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n \times n} = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} = D_{n-1} = na^{n-1}$$

所以
$$x_1 = \frac{D_{n-1}}{D_n} = \frac{n}{(n+1)a}$$

(III) 方程组有无穷多解, 由 $|A| = 0$, 有 $a = 0$, 则方程组为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

此时方程组系数矩阵的秩和增广矩阵的秩均为 $n-1$, 所以方程组有无穷多解, 其通解为

$$k(1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0)^T + (0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0)^T, k \text{ 为任意常数.}$$

(21) 【详解】(I)

证法一: 假设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关. 因为 α_1, α_2 分别属于不同特征值的特征向量, 故 α_1, α_2 线性无关, 则 α_3

可由 α_1, α_2 线性表出, 不妨设 $\alpha_3 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2$, 其中 l_1, l_2 不全为零(若 l_1, l_2 同时为 0, 则 α_3 为 0,

由 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$ 可知 $\alpha_2 = 0$, 而特征向量都是非 0 向量, 矛盾)

$$\because A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$$

$$\therefore A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_2 + l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2, \text{ 又 } A\alpha_3 = A(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2) = -l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2$$

$$\therefore -l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 = \alpha_2 + l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2, \text{ 整理得: } 2l_1\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

则 α_1, α_2 线性相关, 矛盾. 所以, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

证法二: 设存在数 k_1, k_2, k_3 , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$ (1)

用 A 左乘(1)的两边并由 $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$ 得

$$-k_1\alpha_1 + (k_2 + k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0 \quad (2)$$

$$(1)-(2) \text{ 得 } 2k_1\alpha_1 - k_3\alpha_2 = 0 \quad (3)$$

因为 α_1, α_2 是 A 的属于不同特征值的特征向量, 所以 α_1, α_2 线性无关, 从而 $k_1 = k_3 = 0$, 代入(1)

得 $k_2\alpha_2 = 0$, 又由于 $\alpha_2 \neq 0$, 所以 $k_2 = 0$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

(II) 记 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 P 可逆,

$$AP = A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = (-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3)$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(22) 【详解】

$$(I) \quad P(Z \leq \frac{1}{2} | X=0) = P(X+Y \leq \frac{1}{2} | X=0) = \frac{P(X=0, Y \leq \frac{1}{2})}{P(X=0)} = P(Y \leq \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 dy = \frac{1}{2}$$

$$(II) \quad F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X+Y \leq z\}$$

$$= P\{X+Y \leq z, X=-1\} + P\{X+Y \leq z, X=0\} + P\{X+Y \leq z, X=1\}$$

$$= P\{Y \leq z+1, X=-1\} + P\{Y \leq z, X=0\} + P\{Y \leq z-1, X=1\}$$

$$= P\{Y \leq z+1\}P\{X=-1\} + P\{Y \leq z\}P\{X=0\} + P\{Y \leq z-1\}P\{X=1\}$$

$$= \frac{1}{3} [P\{Y \leq z+1\} + P\{Y \leq z\} + P\{Y \leq z-1\}]$$

$$= \frac{1}{3} [F_Y(z+1) + F_Y(z) + F_Y(z-1)]$$

所以
$$f_z(z) = \frac{1}{3} [f_Y(z+1) + f_Y(z) + f_Y(z-1)] = \begin{cases} \frac{1}{3}, & -1 \leq z < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(23) 【详解】(I) 因为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 所以 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, 从而 $E\bar{X} = \mu$, $D\bar{X} = \frac{\sigma^2}{n}$.

因为
$$\begin{aligned} E(T) &= E(\bar{X}^2 - \frac{1}{n}S^2) = E\bar{X}^2 - \frac{1}{n}E(S^2) \\ &= D\bar{X} + (E\bar{X})^2 - \frac{1}{n}E(S^2) = \frac{1}{n}\sigma^2 + \mu^2 - \frac{1}{n}\sigma^2 = \mu^2 \end{aligned}$$

所以, T 是 μ^2 的无偏估计

(II)

方法一: $D(T) = ET^2 - (ET)^2$, $E(T) = 0$, $E(S^2) = \sigma^2 = 1$

$$\begin{aligned} \text{所以 } D(T) &= ET^2 = E(\bar{X}^4 - \frac{2}{n}\bar{X}^2 \cdot S^2 + \frac{S^4}{n^2}) \\ &= E(\bar{X}^4) - \frac{2}{n}E(\bar{X}^2)E(S^2) + \frac{1}{n^2}E(S^4) \end{aligned}$$

因为 $X \sim N(0, 1)$, 所以 $\bar{X} \sim N(0, \frac{1}{n})$,

$$\text{有 } E\bar{X} = 0, D\bar{X} = \frac{1}{n}, E\bar{X}^2 = D\bar{X} + (E\bar{X})^2 = \frac{1}{n}$$

$$\text{所以 } E(\bar{X}^4) = D(\bar{X}^2) + E^2(\bar{X}^2) = D\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n}\bar{X}\right)^2 + [D(\bar{X}) + E^2(\bar{X})]^2$$

$$= \frac{1}{n^2}D(\sqrt{n}\bar{X})^2 + [D(\bar{X})]^2 = \frac{1}{n^2} \cdot 2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{3}{n^2}$$

$$ES^4 = E[(S^2)^2] = DS^2 + (ES^2)^2 = DS^2 + 1$$

$$\text{因为 } W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = (n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1), \text{ 所以 } DW = 2(n-1),$$

$$\text{又因为 } DW = (n-1)^2 DS^2, \text{ 所以 } DS^2 = \frac{2}{(n-1)}, \text{ 所以 } ES^4 = \frac{2}{(n-1)} + 1 = \frac{n+1}{n-1}$$

$$\text{所以 } ET^2 = \frac{3}{n^2} - \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot 1 + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n+1}{n-1} = \frac{2}{n(n-1)}.$$

方法二: 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时

$$\begin{aligned}
 D(T) &= D\left(\bar{X}^2 - \frac{1}{n}S^2\right) \quad (\text{注意 } \bar{X} \text{ 和 } S^2 \text{ 独立}) \\
 &= D\bar{X}^2 + \frac{1}{n^2}DS^2 = \frac{1}{n^2}D\left(\sqrt{n}\bar{X}\right)^2 + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(n-1)^2}D\left[(n-1)S^2\right]
 \end{aligned}$$