

2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、选择题

(1) 【答案】 D

【详解】 因为 $f(0) = f(1) = f(2) = 0$ ，由罗尔定理知至少有 $\xi_1 \in (0,1)$ ， $\xi_2 \in (1,2)$ 使 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ ，所以 $f'(x)$ 至少有两个零点. 由于 $f'(x)$ 是三次多项式，三次方程 $f'(x) = 0$ 的实根不是三个就是一个，故 D 正确.

(2) 【答案】 C

【详解】 $\int_0^a xf'(x)dx = \int_0^a xdf(x) = xf(x)\Big|_0^a - \int_0^a f(x)dx = af(a) - \int_0^a f(x)dx$

其中 $af(a)$ 是矩形 $ABOC$ 面积， $\int_0^a f(x)dx$ 为曲边梯形 $ABOD$ 的面积，所以 $\int_0^a xf'(x)dx$ 为曲边三角形的面积.

(3) 【答案】 D

【详解】 由微分方程的通解中含有 e^x 、 $\cos 2x$ 、 $\sin 2x$ 知齐次线性方程所对应的特征方程有根 $r=1, r=\pm 2i$ ，所以特征方程为 $(r-1)(r-2i)(r+2i)=0$ ，即 $r^3 - r^2 + 4r - 4 = 0$. 故以已知函数为通解的微分方程是 $y''' - y'' + 4y' - 4 = 0$

(4) 【答案】 A

【详解】 $x=0, x=1$ 时 $f(x)$ 无定义，故 $x=0, x=1$ 是函数的间断点

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-\csc x \cot x}$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\cos x} = 0$$

同理 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$

又 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \sin x = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} \right) \sin 1 = \sin 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{1-x} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \sin x = -\sin 1$$

所以 $x=0$ 是可去间断点, $x=1$ 是跳跃间断点.

(5) 【答案】 B

【详解】 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, 且 $\{x_n\}$ 单调. 所以 $\{f(x_n)\}$ 单调且有界. 故 $\{f(x_n)\}$ 一定存在极限.

(6) 【答案】 A

【详解】 用极坐标得
$$F(u, v) = \iint_D \frac{f(u^2 + v^2)}{\sqrt{u^2 + v^2}} du dv = \int_0^v dv \int_1^u \frac{f(r^2)}{r} r dr = v \int_1^u f(r^2) dr$$

所以
$$\frac{\partial F}{\partial u} = v f(u^2)$$

(7) 【答案】 C

【详解】 $(E-A)(E+A+A^2) = E - A^3 = E$, $(E+A)(E-A+A^2) = E + A^3 = E$

故 $E-A, E+A$ 均可逆.

(8) 【答案】 D

【详解】 记 $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$,

则 $|\lambda E - D| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4$, 又 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4$

所以 A 和 D 有相同的特征多项式, 所以 A 和 D 有相同的特征值.

又 A 和 D 为同阶实对称矩阵, 所以 A 和 D 相似. 由于实对称矩阵相似必合同, 故 D 正确.

二、填空题

(9) 【答案】 2

【详解】
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos[xf(x)]}{(e^{x^2} - 1)f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2[xf(x)/2]}{x^2 f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2[xf(x)/2] \cdot f(x)}{[xf(x)/2]^2 \cdot 4} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2} f(0) = 1 \end{aligned}$$

所以 $f(0) = 2$

(10) 【答案】 $x(-e^{-x} + C)$

【详解】微分方程 $(y + x^2 e^{-x}) dx - x dy = 0$ 可变形为 $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x e^{-x}$

所以 $y = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left[\int x e^{-x} e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right] = x \left(\int x e^{-x} \cdot \frac{1}{x} dx + C \right) = x(-e^{-x} + C)$

(11) 【答案】 $y = x + 1$

【详解】设 $F(x, y) = \sin(xy) + \ln(y - x) - x$, 则 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{y \cos(xy) - \frac{1}{y-x} - 1}{x \cos(xy) + \frac{1}{y-x}}$,

将 $y(0) = 1$ 代入得 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 1$, 所以切线方程为 $y - 1 = x - 0$, 即 $y = x + 1$

(12) 【答案】 $(-1, -6)$

【详解】 $y = x^{5/3} - 5x^{2/3} \Rightarrow y' = \frac{5}{3}x^{2/3} - \frac{10}{3}x^{-1/3} = \frac{10(x+2)}{3x^{1/3}}$
 $\Rightarrow y'' = \frac{10}{9}x^{-1/3} + \frac{10}{9}x^{-4/3} = \frac{10(x+1)}{9x^{4/3}}$

$x = -1$ 时, $y'' = 0$; $x = 0$ 时, y'' 不存在

在 $x = -1$ 左右近旁 y'' 异号, 在 $x = 0$ 左右近旁 $y'' > 0$, 且 $y(-1) = -6$

故曲线的拐点为 $(-1, -6)$

(13) 【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2 - 1)$

【详解】设 $u = \frac{y}{x}, v = \frac{x}{y}$, 则 $z = u^v$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = v u^{v-1} \left(-\frac{y}{x^2}\right) + u^v \ln u \cdot \frac{1}{y}$
 $= u^v \left(-\frac{vy}{ux^2} + \frac{\ln u}{y}\right) = \left(\frac{y}{x}\right)^{x/y} \cdot \frac{1}{y} \left(-1 + \ln \frac{y}{x}\right)$

所以 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\ln 2 - 1)$

(14) 【答案】 -1

【详解】 $\because |A| = 2 \times 3 \times \lambda = 6\lambda \quad |2A| = 2^3 |A|$

$$\therefore 2^3 \times 6\lambda = -48 \quad \Rightarrow \lambda = -1$$

三、解答题

(15) 【详解】

方法一: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x^3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos(\sin x) \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin^2 x}{3x^2} = \frac{1}{6}$$

方法二: $\because \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \quad \sin(\sin x) = \sin x - \frac{1}{6}\sin^3 x + o(\sin^3 x)$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin^4 x}{6x^4} + \frac{o(\sin^4 x)}{x^4} \right] = \frac{1}{6}$$

(16) 【详解】

方法一: 由 $\frac{dx}{dt} - 2te^{-x} = 0$ 得 $e^x dx = 2tdt$, 积分并由条件 $x|_{t=0}$ 得 $e^x = 1+t^2$, 即 $x = \ln(1+t^2)$

所以 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\ln(1+t^2) \cdot 2t}{\frac{2t}{1+t^2}} = (1+t^2) \ln(1+t^2)$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} [(1+t^2) \ln(1+t^2)]}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t \ln(1+t^2) + 2t}{\frac{2t}{1+t^2}} \\ &= (1+t^2) [\ln(1+t^2) + 1] \end{aligned}$$

方法二: 由 $\frac{dx}{dt} - 2te^{-x} = 0$ 得 $e^x dx = 2tdt$, 积分并由条件 $x|_{t=0}$ 得 $e^x = 1+t^2$, 即 $x = \ln(1+t^2)$

所以 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\ln(1+t^2) \cdot 2t}{\frac{2t}{1+t^2}} = (1+t^2) \ln(1+t^2) = e^x x$

所以 $\frac{d^2 y}{dx^2} = e^x(x+1)$

(17) 【详解】

方法一：由于 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$ ，故 $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 是反常积分。

令 $\arcsin x = t$ ，有 $x = \sin t$ ， $t \in [0, \pi/2)$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sin^2 t}{\cos t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{t}{2} - \frac{t \cos 2t}{2} \right) dt \\ &= \frac{t^2}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t d \sin 2t = \frac{\pi^2}{16} - \frac{t \sin 2t}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt \\ &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{8} \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

方法二： $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 d(\arcsin x)^2$

$$= \frac{1}{2} x^2 (\arcsin x)^2 \Big|_0^1 - \int_0^1 x (\arcsin x)^2 dx = \frac{\pi^2}{8} - \int_0^1 x (\arcsin x)^2 dx$$

令 $\arcsin x = t$ ，有 $x = \sin t$ ， $t \in [0, \pi/2)$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x (\arcsin x)^2 dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin 2t dt = -\frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 d \cos 2t \\ &= -\frac{1}{4} (t^2 \cos 2t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos 2t dt = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

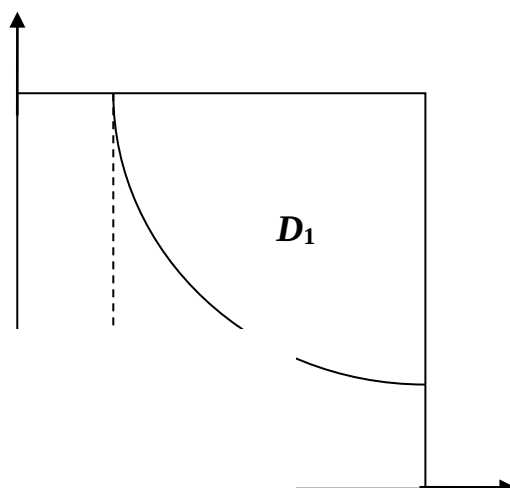
故，原式 $= \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}$

(18) 【详解】 曲线 $xy=1$ 将区域分成两

个区域 D_1 和 $D_2 + D_3$ ，为了便于计算继续对

区域分割，最后为

$$\iint_D \max(xy, 1) dx dy$$



$$\begin{aligned}
&= \iint_{D_1} xy dx dy + \iint_{D_2} dx dy + \iint_{D_3} dx dy \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^2 1 dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_0^{\frac{1}{x}} 1 dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 xy dy \\
&= 1 + 2 \ln 2 + \frac{15}{4} - \ln 2 = \frac{19}{4} + \ln 2
\end{aligned}$$

(19) 【详解】旋转体的体积 $V = \pi \int_0^t f^2(x) dx$ ，侧面积 $S = 2\pi \int_0^t f(x) \sqrt{1+f'^2(x)} dx$ ，由题设条件知

$$\int_0^t f^2(x) dx = \int_0^t f(x) \sqrt{1+f'^2(x)} dx$$

上式两端对 t 求导得 $f^2(t) = f(t) \sqrt{1+f'^2(t)}$ ，即 $y' = \sqrt{y^2-1}$

由分离变量法解得 $\ln(y + \sqrt{y^2-1}) = t + C_1$ ，即 $y + \sqrt{y^2-1} = Ce^t$

将 $y(0)=1$ 代入知 $C=1$ ，故 $y + \sqrt{y^2-1} = e^t$ ， $y = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$

于是所求函数为 $y = f(x) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$

(20) 【详解】(I) 设 M 与 m 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值与最小值，即

$$m \leq f(x) \leq M \quad x \in [a, b]$$

由定积分性质，有 $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ ，即 $m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M$

由连续函数介值定理，至少存在一点 $\eta \in [a, b]$ ，使得 $f(\eta) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$

即 $\int_a^b f(x) dx = f(\eta)(b-a)$

(II) 由(I)的结论可知至少存在一点 $\eta \in [2, 3]$ ，使 $\int_2^3 \varphi(x) dx = \varphi(\eta)(3-2) = \varphi(\eta)$

又由 $\varphi(2) > \int_2^3 \varphi(x) dx = \varphi(\eta)$ ，知 $2 < \eta \leq 3$

对 $\varphi(x)$ 在 $[1, 2][2, \eta]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，并注意到 $\varphi(1) < \varphi(2)$ ， $\varphi(\eta) < \varphi(2)$ 得

$$\varphi'(\xi_1) = \frac{\varphi(2) - \varphi(1)}{2-1} > 0 \quad 1 < \xi_1 < 2$$

$$\varphi'(\xi_2) = \frac{\varphi(\eta) - \varphi(2)}{\eta - 2} < 0 \quad 2 < \xi_1 < \eta \leq 3$$

在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上对导函数 $\varphi'(x)$ 应用拉格朗日中值定理, 有

$$\varphi''(\xi) = \frac{\varphi'(\xi_2) - \varphi'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0 \quad \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (1, 3)$$

(21) 【详解】

方法一: 作拉格朗日函数 $F(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y + z - 4)$

$$\text{令} \begin{cases} F'_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0 \\ F'_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0 \\ F'_z = 2z - \lambda + \mu = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - z = 0 \\ F'_\mu = x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

解方程组得 $(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 2), (x_2, y_2, z_2) = (-2, -2, 8)$

故所求的最大值为 72, 最小值为 6.

方法二: 问题可转化为求 $u = x^2 + y^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ 在 $x + y + x^2 + y^2 = 4$ 条件下的最值

设 $F(x, y, \lambda) = u = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + y^2 + \lambda(x + y + x^2 + y^2 - 4)$

$$\text{令} \begin{cases} F'_x = 4x^3 + 4xy^2 + 2x + \lambda(1 + 2x) = 0 \\ F'_y = 4y^3 + 4x^2y + 2y + \lambda(1 + 2y) = 0 \\ F'_\lambda = x + y + x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

解得 $(x_1, y_1) = (1, 1), (x_2, y_2) = (-2, -2)$, 代入 $z = x^2 + y^2$, 得 $z_1 = 2, z_2 = 8$

故所求的最大值为 72, 最小值为 6.

(22) 【详解】(I)证法一:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - \frac{1}{2}ar_1} \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ 0 & \frac{3a}{2} & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix} = \dots$$

$$\begin{aligned} & \frac{r_n - \frac{n-1}{n}ar_{n-1}}{=} \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ 0 & \frac{3a}{2} & 1 & & \\ & 0 & \frac{4a}{3} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 0 & \frac{(n+1)a}{n} \end{vmatrix} = 2a \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{4a}{3} \cdots \frac{(n+1)a}{n} = (n+1)a^n \end{aligned}$$

证法二：记 $D_n = |A|$ ，下面用数学归纳法证明 $D_n = (n+1)a^n$ 。

当 $n=1$ 时， $D_1 = 2a$ ，结论成立。

当 $n=2$ 时， $D_2 = \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix} = 3a^2$ ，结论成立。

假设结论对小于 n 的情况成立。将 D_n 按第 1 行展开得

$$\begin{aligned} D_n &= 2aD_{n-1} - \begin{vmatrix} a^2 & 1 & & & \\ 0 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix} \\ &= 2aD_{n-1} - a^2D_{n-2} = 2ana^{n-1} - a^2(n-1)a^{n-2} = (n+1)a^n \end{aligned}$$

故 $|A| = (n+1)a^n$

证法三：记 $D_n = |A|$ ，将其按第一列展开得 $D_n = 2aD_{n-1} - a^2D_{n-2}$ ，

所以 $D_n - aD_{n-1} = aD_{n-1} - a^2D_{n-2} = a(D_{n-1} - aD_{n-2})$

$$= a^2(D_{n-2} - aD_{n-3}) = \cdots = a^{n-2}(D_2 - aD_1) = a^n$$

即 $D_n = a^n + aD_{n-1} = a^n + a(a^{n-1} + aD_{n-2}) = 2a^n + a^2D_{n-2}$

$$= \cdots = (n-2)a^n + a^{n-2}D_2 = (n-1)a^n + a^{n-1}D_1$$

$$= (n-1)a^n + a^{n-1} \cdot 2a = (n+1)a^n$$

(II) 因为方程组有唯一解, 所以由 $Ax = B$ 知 $|A| \neq 0$, 又 $|A| = (n+1)a^n$, 故 $a \neq 0$.

由克莱姆法则, 将 D_n 的第 1 列换成 b , 得行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n \times n} = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} = D_{n-1} = na^{n-1}$$

所以
$$x_1 = \frac{D_{n-1}}{D_n} = \frac{n}{(n+1)a}$$

(III) 方程组有无穷多解, 由 $|A| = 0$, 有 $a = 0$, 则方程组为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

此时方程组系数矩阵的秩和增广矩阵的秩均为 $n-1$, 所以方程组有无穷多解, 其通解为

$$k(1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0)^T + (0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0)^T, k \text{ 为任意常数}.$$

(23) 【详解】(I)

证法一: 假设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关. 因为 α_1, α_2 分别属于不同特征值的特征向量, 故 α_1, α_2 线

性无关, 则 α_3 可由 α_1, α_2 线性表出, 不妨设 $\alpha_3 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2$, 其中 l_1, l_2 不全为零(若

l_1, l_2 同时为 0, 则 α_3 为 0, 由 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$ 可知 $\alpha_2 = 0$, 而特征向量都是非 0 向量, 矛盾)

$$\because A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$$

$$\therefore A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_2 + l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2, \text{ 又 } A\alpha_3 = A(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2) = -l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2$$

$$\therefore -l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 = \alpha_2 + l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2, \text{ 整理得: } 2l_1\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

则 α_1, α_2 线性相关, 矛盾. 所以, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

证法二：设存在数 k_1, k_2, k_3 ，使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$ (1)

用 A 左乘(1)的两边并由 $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$ 得

$$-k_1\alpha_1 + (k_2 + k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0 \quad (2)$$

(1) - (2) 得 $2k_1\alpha_1 - k_3\alpha_2 = 0$ (3)

因为 α_1, α_2 是 A 的属于不同特征值的特征向量，所以 α_1, α_2 线性无关，从而

$k_1 = k_3 = 0$ ，代入(1)得 $k_2\alpha_2 = 0$ ，又由于 $\alpha_2 \neq 0$ ，所以 $k_2 = 0$ ，故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

(II) 记 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ，则 P 可逆，

$$AP = A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = (-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3)$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$