

2006年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题

(1) 【答案】 2.

【详解】 由等价无穷小替换, $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x) \sim x, 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2$$

(2) 【答案】 Cxe^{-x} .

【详解】 分离变量,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y(1-x)}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{(1-x)}{x} dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{x} dx - \int dx \\ &\Rightarrow \ln y = \ln x - x + c \Rightarrow e^{\ln y} = e^{\ln x - x + c} \Rightarrow y = Cxe^{-x} \end{aligned}$$

(3) 【答案】 2π

【详解】 补一个曲面 $\Sigma_1: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ z = 1 \end{cases}$, 取上侧, 则 $\Sigma_1 + \Sigma$ 组成的封闭立体 Ω 满足高斯公式,

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oiint_{\Sigma_1 + \Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = I$$

设 $P=x, Q=2y, R=3(z-1)$, 则 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1+2+3=6$

$\therefore I = \iiint_{\Omega} 6dx dy dz$ (Ω 为锥面 Σ 和平面 Σ_1 所围区域) $= 6V$ (V 为上述圆锥体体积)

注: 以下几种解法针对于不同的方法求圆锥体体积 V

方法 1: $I = 6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi$ (高中方法, 圆锥的体积公式, 这种方法最简便)

而 $\iint_{\Sigma_1} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dx dy = 0$ ($\because$ 在 Σ_1 上: $z=1, dz=0$)

方法 2: 先二重积分, 后定积分.

因为 $V = \int_0^1 Sdz$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r^2 = x^2 + y^2$, $r^2 = z^2$, $S = \pi r^2 = \pi z^2$,

所以 $V = \int_0^1 \pi z^2 dz = \frac{1}{3} \pi z^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \pi$. 从而 $I = 6V = 6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi$

方法 3: 利用球面坐标. $z=1$ 在球坐标下为: $\rho = \frac{1}{\cos \theta}$,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} 6\rho^2 \sin \varphi d\rho = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin \varphi}{\cos^3 \varphi} d\varphi \\ &= (-2) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d \cos \varphi}{\cos^3 \varphi} = (-2) \int_0^{2\pi} d\theta \left(-\frac{1}{2} \right) \cos^{-2} \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \end{aligned}$$

方法 4: 利用柱面坐标 .

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_r^1 6rdz = 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r)rdr \\ &= 6 \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{3} r^3 \right) \Big|_0^1 = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \end{aligned}$$

(4) 【答案】 $\sqrt{2}$

【详解】代入点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离公式

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|6 + 4 + 0|}{\sqrt{9 + 16 + 25}} = \sqrt{2}$$

(5) 【答案】 2

【详解】由已知条件 $BA = B + 2E$ 变形得, $BA - 2E = B \Rightarrow B(A - E) = 2E$, 两边取行列式, 得

$$|B(A - E)| = |2E| = 4|E| = 4$$

$$\text{其中, } |A - E| = \left| \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right| = 2, \quad |2E| = 2^2 |E| = 4$$

$$\text{因此, } |B| = \frac{|2E|}{|A - E|} = \frac{4}{2} = 2.$$

(6) 【答案】 $1/9$

【详解】根据独立性原理: 若事件 $A_1, \dots, A_n$ 独立, 则

$$P\{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n\} = P\{A_1\}P\{A_2\} \cdots P\{A_n\}$$

事件 $\{\max\{X, Y\} \leq 1\} = \{X \leq 1, Y \leq 1\} = \{X \leq 1\} \cap \{Y \leq 1\}$, 而随机变量 X 与 Y 均服从区间 $[0, 3]$ 上的均匀分布, 有 $P\{X \leq 1\} = \int_0^1 \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3}$ 和 $P\{Y \leq 1\} = \int_0^1 \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3}$. 又随机变量 X 与 Y 相互独立, 所以,

$$P\{\max(x, y) \leq 1\} = P\{x \leq 1, Y \leq 1\} = P\{x \leq 1\} \cdot P\{Y \leq 1\} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

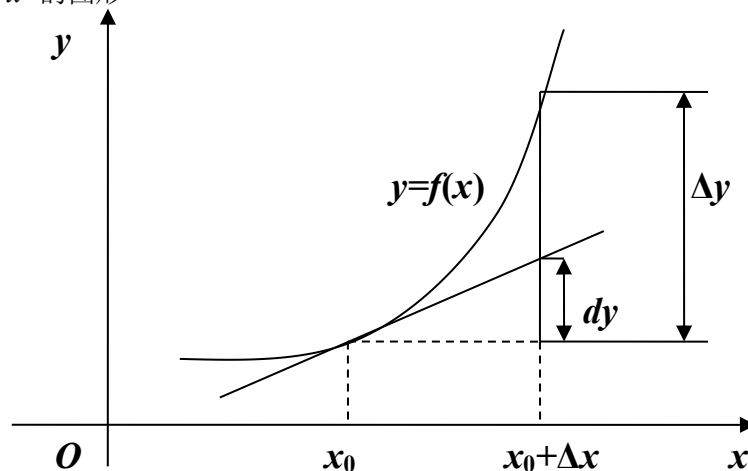
二、选择题.

(7) 【答案】 A

【详解】

方法 1: 图示法.

因为 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 严格单调增加; 因为 $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 是凹函数, 又 $\Delta x > 0$, 画 $f(x) = x^2$ 的图形



结合图形分析, 就可以明显得出结论: $0 < dy < \Delta y$.

方法 2: 用两次拉格朗日中值定理

$$\Delta y - dy = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x \quad (\text{前两项用拉氏定理})$$

$$= f'(\xi)\Delta x - f'(x_0)\Delta x \quad (\text{再用一次拉氏定理})$$

$$= f''(\eta)(\xi - x_0)\Delta x, \quad \text{其中 } x_0 < \xi < x_0 + \Delta x, x_0 < \eta < \xi$$

由于 $f''(x) > 0$, 从而 $\Delta y - dy > 0$. 又由于 $dy = f'(x_0)\Delta x > 0$, 故选 [A]

方法 3: 用拉格朗日余项一阶泰勒公式. 泰勒公式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n,$$

其中 $R_n = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$. 此时 n 取 1 代入, 可得

$$\Delta y - dy = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x = \frac{1}{2}f''(\xi)(\Delta x)^2 > 0$$

又由 $dy = f'(x_0)\Delta x > 0$, 选 (A).

(8) 【答案】 (C)

【详解】 记 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr = \iint_D f(x, y) dx dy$, 则区域 D 的极坐标表示是:

$0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. 题目考察极坐标和直角坐标的互化问题, 画出积分区间, 结合图形可以看出, 直角坐标的积分范围(注意 $y = x$ 与 $x^2 + y^2 = 1$ 在第一象限的交点是 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$), 于是 $D: 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$

所以, 原式 $= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$. 因此选 (C)

(9) 【答案】 D

【详解】

方法 1: 数列收敛的性质: 收敛数列的四则运算后形成的新数列依然收敛

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ 也收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$ 收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 也收敛. 选 D.

方法 2: 记 $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 但 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, (p 级数, $p = \frac{1}{2}$ 级数发散);

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$ (p 级数, $p = 1$ 级数发散) 均发散. 由排除法可知, 应选 D.

(10) 【答案】 D

【详解】

方法 1: 化条件极值问题为一元函数极值问题.

已知 $\varphi(x_0, y_0) = 0$, 由 $\varphi(x, y) = 0$, 在 (x_0, y_0) 邻域, 可确定隐函数 $y = y(x)$,

满足 $y(x_0) = y_0$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} / \frac{\partial \varphi}{\partial y}$.

(x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点 $\Leftrightarrow x = x_0$ 是 $z = f(x, y(x))$ 的极值点. 它的必要条件是

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \frac{dy}{dx} \bigg|_{x=x_0} = f'_x(x_0, y_0) - f'_y(x_0, y_0) \frac{\varphi'_x(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)} \bigg|_{x=x_0} = 0$$

若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$, 或 $\varphi'_x(x_0, y_0) = 0$, 因此不选 (A), (B).

若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ (否则 $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=x_0} \neq 0$). 因此选 (D)

方法 2: 用拉格朗日乘子法. 引入函数 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$, 有

$$\begin{cases} F'_x = f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0 & (1) \\ F'_y = f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0 & (2) \\ F'_\lambda = \varphi'(x, y) = 0 \end{cases}$$

因为 $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$ ，所以 $\lambda = -\frac{f'_y(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)}$ ，代入(1)得

$$f'_x(x_0, y_0) = -\frac{f'_y(x_0, y_0)\varphi'_x(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)}$$

若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ ，则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ ，选(D)

(11) 【答案】A

【详解】

方法1：若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关，则由线性相关定义存在不全为0的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

为了得到 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 的形式，用 A 左乘等式两边，得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + \dots + k_sA\alpha_s = 0 \quad \text{①}$$

于是存在不全为0的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 使得①成立，所以 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关。

方法2：如果用秩来解，则更加简单明了。只要熟悉两个基本性质，它们是：

1. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s$ ；2. $r(AB) \leq r(B)$ 。

矩阵 $(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s) = A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ ，设 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ ，则由

$r(AB) \leq r(B)$ 得 $r(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s$ 。所以答案应该为(A)。

(12) 【答案】B

【详解】用初等矩阵在乘法中的作用(矩阵左乘或右乘初等矩阵相当于对矩阵进行初等行变换或列变换)得出

$$\text{将 } A \text{ 的第2行加到第1行得 } B, \text{ 即 } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \xrightarrow{\text{记}} PA$$

$$\text{将 } B \text{ 的第1列的-1倍加到第2列得 } C, \text{ 即 } C = B \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{记}} BQ$$

$$\text{因为 } PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E, \text{ 故 } Q = P^{-1}E = P^{-1}.$$

从而 $C = BQ = BP^{-1} = PAP^{-1}$, 故选 (B).

(13) 【答案】C

【详解】本题考条件概率的概念和概率的一般加法公式

根据条件概率的定义, 当 $P(B) > 0$ 时, $P\{A|B\} = \frac{P\{AB\}}{P\{B\}} = 1$ 得 $P\{AB\} = P\{B\}$

根据加法公式有 $P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\} = P\{A\}$, 故选 (C)

(14) 【答案】A.

【详解】由于 X 与 Y 的分布不同, 不能直接判断 $P\{|X - \mu_1| < 1\}$ 和 $P\{|Y - \mu_2| < 1\}$ 的大小与参数关系. 如果将其标准化后就可以方便地进行比较了.

随机变量标准化, 有 $\frac{X - \mu_1}{\sigma_1} \sim N(0, 1)$, 且其概率密度函数是偶函数. 所以

$$P(|X - \mu_1| < 1) = P\left(\left|\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}\right| < \frac{1}{\sigma_1}\right) = 2P\left\{0 < \frac{X - \mu_1}{\sigma_1} < \frac{1}{\sigma_1}\right\} = 2[\Phi(\frac{1}{\sigma_1}) - \Phi(0)] = 2\Phi(\frac{1}{\sigma_1}) - 1.$$

$$\text{同理有, } P(|Y - \mu_2| < 1) = 2\Phi(\frac{1}{\sigma_2}) - 1$$

因为 $\Phi(x)$ 是单调递增函数, 当 $P\{|X - \mu_1| < 1\} > P\{|Y - \mu_2| < 1\}$ 时,

$$2\Phi(\frac{1}{\sigma_1}) - 1 > 2\Phi(\frac{1}{\sigma_2}) - 1, \text{ 即 } \frac{1}{\sigma_1} > \frac{1}{\sigma_2}, \text{ 所以 } \sigma_1 < \sigma_2, \text{ 故选 (A).}$$

三、解答题

(15) 【详解】积分区域对称于 x 轴, $\frac{xy}{1+x^2+y^2}$ 为 y 的奇函数,

$$\text{从而知 } \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx dy = 0$$

$$\text{所以 } I = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy \xrightarrow{\text{极坐标}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{r}{1+r^2} dr = \frac{\pi}{2} \ln(1+r^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \ln 2$$

(16)【详解】(I) 由于 $0 < x < \pi$ 时, $0 < \sin x < x$, 于是 $0 < x_{n+1} = \sin x_n \leq x_n$, 说明数列 $\{x_n\}$

单调减少且 $x_n > 0$. 由单调有界准则知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. 记为 A .

递推公式两边取极限得 $A = \sin A$, $\therefore A = 0$

(II) 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$, 为 “ 1^∞ ” 型.

因为离散型不能直接用洛必达法则, 先考虑 $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^{\frac{1}{t^2}}$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^{\frac{1}{t^2}} &= e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \ln \left(\frac{\sin t}{t} \right)} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2t} \cdot \frac{1}{\sin t} \cdot \frac{(t \cos t - \sin t)}{t^2}} \\ &= e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos t - \sin t}{2t^3}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - t \sin t - \cos t}{6t^2}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{6t}} = e^{-\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$

(17)【详解】用分解法转化为求 $\frac{1}{1+ax}$ 的展开式, 而这是已知的.

$$\begin{aligned} \text{由于 } \frac{1}{2+x-x^2} &= \frac{1}{(1+x)(2-x)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \quad (|x| < 1) \end{aligned}$$

$$\text{因此 } f(x) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}} \right] x^{n+1} \quad (|x| < 1).$$

(18)【详解】(I) 由于题目是验证, 只要将二阶偏导数求出来代入题目中给的等式就可以了

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= f'(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= f''(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{x^2}{(x^2+y^2)} + f'(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)} \\ &= f''(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{x^2}{(x^2+y^2)} + f'(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

同理
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{y^2}{(x^2+y^2)} + f'(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

代入 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, 得
$$f''(\sqrt{x^2+y^2}) + \frac{f'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

所以 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$ 成立.

(II) 令 $f'(u) = p$ 于是上述方程成为 $\frac{dp}{du} = -\frac{p}{u}$, 则 $\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{du}{u} + c$,

即 $\ln|p| = -\ln u + c$, 所以 $f'(u) = p = \frac{c}{u}$

因为 $f'(1) = 1$, 所以 $c = 1$, 得 $f(u) = \ln u + c_2$

又因为 $f(1) = 0$, 所以 $c_2 = 0$, 得 $f(u) = \ln u$

(19) 【详解】

方法 1: 把 $f(tx, ty) = t^{-2}f(x, y)$ 两边对 t 求导, 得: $xf'_x(tx, ty) + yf'_y(tx, ty) = -2t^{-3}f(x, y)$

令 $t = 1$, 则 $xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = -2f(x, y)$;

再令 $P = yf(x, y)$, $Q = -xf(x, y)$,

所以 $\frac{\partial Q}{\partial x} = -f(x, y) - xf'_x(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y} = f(x, y) + yf'_y(x, y)$

得 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 所以由格林公式知结论成立.

方法 2: D 是单连通区域, 对于 D 内的任意分段光滑简单闭曲线 L , Γ 为 D 内的一曲线

$$\oint_L yf(x, y)dx - xf(x, y)dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Gamma} yf(x, y)dx - xf(x, y)dy \text{ 在 } D \text{ 内与路径无关}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}(-xf(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(yf(x, y)) \quad ((x, y) \in D)$$

$$\Leftrightarrow xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) + 2f(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in D)$$

同方法 1, 由 $f(tx, ty) = t^{-2}f(x, y)$ 可证得上式.

因此结论成立.

(20) 【详解】(I) 系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \\ a & 1 & 3 & b \end{bmatrix}$ 未知量的个数为 $n=4$ ，且又 $AX=b$ 有三个

线性无关解，设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是方程组的 3 个线性无关的解，则 $\alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_1$ 是 $AX=0$ 的两个线性无关的解。因为 $\alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_1$ 线性无关又是齐次方程的解，于是 $AX=0$ 的基础解系中解的个数不少于 2，得 $4-r(A) \geq 2$ ，从而 $r(A) \leq 2$ 。

又因为 A 的行向量是两两线性无关的，所以 $r(A) \geq 2$ 。所以 $r(A) = 2$ 。

(II) 对方程组的增广矩阵作初等行变换：

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & |-1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & |-1 \\ a & 1 & 3 & b & |1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} [2]+[1] \times (-4) \\ [3]+[1] \times (-a) \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & |-1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & |3 \\ 0 & 1-a & 3-a & b-a & |1+a \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]+[2] \times (1-a)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & |-1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & |3 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a+b-5 & |4-2a \end{bmatrix},$$

由 $r(A)=2$ ，得 $\begin{cases} 4-2a=0 \\ 4a+b-5=0 \end{cases}$ ，即 $a=2, b=-3$ 。

所以 $[A|b]$ 作初等行变换后化为： $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & |2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & |-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |0 \end{bmatrix}$ ，

它的同解方程组 $\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 4x_4 \\ x_2 = -3 + x_3 - 5x_4 \end{cases}$ ①

①中令 $x_3=0, x_4=0$ 求出 $AX=b$ 的一个特解 $(2, -3, 0, 0)^T$ ；

$AX=0$ 的同解方程组是 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 4x_4 \\ x_2 = x_3 - 5x_4 \end{cases}$ ②

取 $x_3=1, x_4=0$ ，代入②得 $(-2, 1, 1, 0)^T$ ；取 $x_3=0, x_4=1$ ，代入②得 $(4, -5, 0, 1)^T$ 。所以

$AX=0$ 的基础解系为 $(-2, 1, 1, 0)^T, (4, -5, 0, 1)^T$

所以方程组 $AX=b$ 的通解为：

$$(2, -3, 0, 0)^T + c_1(-2, 1, 1, 0)^T + c_2(4, -5, 0, 1)^T, \quad c_1, c_2 \text{ 为任意常数}$$

(21) 【详解】(I) 由题设条件 $A\alpha_1 = 0 = 0\alpha_1$, $A\alpha_2 = 0 = 0\alpha_2$, 故 α_1, α_2 是 A 的对应于 $\lambda = 0$ 的特征向量, 又因为 α_1, α_2 线性无关, 故 $\lambda = 0$ 至少是 A 的二重特征值. 又因为 A 的每行元素之和为 3, 所以有 $A(1,1,1)^T = (3,3,3)^T = 3(1,1,1)^T$, 由特征值、特征向量的定义, $\alpha_0 = (1,1,1)^T$ 是 A 的特征向量, 特征值为 $\lambda_3 = 3$, λ_3 只能是单根, $k_3\alpha_0, k_3 \neq 0$ 是全体特征向量, 从而知 $\lambda = 0$ 是二重特征值.

于是 A 的特征值为 $3, 0, 0$; 属于 3 的特征向量: $k_3\alpha_3, k_3 \neq 0$; 属于 0 的特征向量: $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$, k_1, k_2 不都为 0.

(II) 为了求出可逆矩阵必须对特征向量进行单位正交化.

先将 α_0 单位化, 得 $\eta_0 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})^T$.

对 α_1, α_2 作施密特正交化, 得 $\eta_1 = (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$, $\eta_2 = (-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6})^T$.

作 $Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, 则 Q 是正交矩阵, 并且 $Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(22) 【详解】 $f_Y(y) = F'_Y(y)$, 由于 $f_X(x)$ 是分段函数, 所以在计算 $P\{X^2 \leq y\}$ 时, 要相应分段讨论. 求 $F(-\frac{1}{2}, 4) = P(X \leq -\frac{1}{2}, Y \leq 4) = P(X \leq -\frac{1}{2}, X^2 \leq 4)$, 只是与 X 有关, 不必先求出 $F(x, y)$ 的函数.

(I) 因为 $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\}$, 当 $y < 0$ 时, $F_Y(y) = 0$;

当 $0 \leq y < 1$ 时, $F_Y(y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^0 \frac{1}{2} dx + \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{4} dx = \frac{3}{4} \sqrt{y}$;

当 $1 \leq y < 4$ 时, $F_Y(y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-1}^0 \frac{1}{2} dx + \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{4} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sqrt{y}$;

当 $y \geq 4$ 时, $F_Y(y) = 1$;

综上所述, 有

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\} = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{3}{4}\sqrt{y}, & 0 \leq y < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{y}, & 1 \leq y < 4 \\ 1, & 4 \leq y \end{cases}$$

由概率密度是分布函数在对应区间上的微分, 所以,

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0 < y < 1 \\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1 \leq y < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

这个解法是从分布函数的最基本的概率定义入手, 对 y 进行适当的讨论即可, 属于基本题型.

$$(II) \text{ 由协方差的计算公式 } \text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, X^2) = E(X^3) - E(X) \cdot E(X^2)$$

需要计算 $E(X)$, $E(X^2)$, $E(X^3)$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{x}{2} dx + \int_0^2 \frac{x}{4} dx = \frac{1}{4};$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{x^2}{2} dx + \int_0^2 \frac{x^2}{4} dx = \frac{5}{6};$$

$$E(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_X(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{x^3}{2} dx + \int_0^2 \frac{x^3}{4} dx = \frac{7}{8}.$$

$$\text{故 } \text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, X^2) = E(X^3) - E(X) \cdot E(X^2) = \frac{7}{8} - \frac{1}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{2}{3}.$$

(III) 根据二维随机变量的定义 $F(a, b) = P\{X \leq a, Y \leq b\}$, 有

$$F(-\frac{1}{2}, 4) = P(X \leq -\frac{1}{2}, Y \leq 4) = P\left\{X \leq -\frac{1}{2}, X^2 \leq 4\right\} = P\left\{-2 \leq X \leq -\frac{1}{2}\right\}$$

$$\text{由一维概率计算公式 } P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f_X(x) dx \text{ 有, } F(-\frac{1}{2}, 4) = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{4}.$$

$$(23) \text{ 【答案】 } \hat{\theta} = \frac{3}{2} - \bar{X}; \theta \text{ 的最大似然估计 } \hat{\theta} = \frac{N}{n}.$$

【详解】矩估计的实质在于用样本矩来估计相应的总体矩, 此题中被估参数只有一个, 故只需要用样本一阶原点矩(样本均值)来估计总体的一阶原点矩(期望), 所以矩估计的关键在于

找出总体的矩 $E(X)$.

最大似然估计, 实质上就是找出使似然函数最大的那个参数, 问题的关键在于构造似然函数. 样本值中 x_i 小于 1 的概率是 θ , x_i 大于 1 的概率是 $(1-\theta)$. 因此, 似然函数应为:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \theta^N (1-\theta)^{n-N}.$$

(I) 由数学期望的定义:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x; \theta)dx = \int_0^1 \theta x dx + \int_1^2 (1-\theta)x dx = \frac{1}{2}\theta + \frac{3}{2}(1-\theta) = \frac{3}{2} - \theta$$

样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

用样本均值估计期望有 $EX = \bar{X}$ 即 $\frac{3}{2} - \theta = \bar{X}$, 解得 $\theta = \frac{3}{2} - \bar{X}$.

所以参数 θ 的矩估计为 $\hat{\theta} = \frac{3}{2} - \bar{X}$. 其中 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

(II) 对样本 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 按照 <1 或者 ≥ 1 进行分类, 不妨设: $x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pN} < 1$,

$x_{pN+1}, x_{pN+2}, \dots, x_{pn} \geq 1$. 似然函数

$$L(\theta) = \begin{cases} \theta^N (1-\theta)^{n-N}, & x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pN} < 1, x_{pN+1}, x_{pN+2}, \dots, x_{pn} \geq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

在 $x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pN} < 1$, $x_{pN+1}, x_{pN+2}, \dots, x_{pn} \geq 1$ 时, 等式两边同取自然对数得

$$\ln L(\theta) = N \ln \theta + (n-N) \ln(1-\theta),$$

由于 $\ln L(\theta)$ 和 $L(\theta)$ 在 θ 的同一点取得最大值, 所以令

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{N}{\theta} - \frac{n-N}{1-\theta} = 0,$$

解得 $\theta = \frac{N}{n}$, 所以 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta} = \frac{N}{n}$.