

2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题解析

一、填空题

(1) 【答案】 1

【详解】 题目考察数列的极限，由于数列中有 $(-1)^n$ ，故求此数列的极限，分为奇数列和偶数列两个部分进行。

记 $u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}$ ，则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{(-1)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n}\right) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{(-1)^{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n}\right) = 1$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$ 。

(2) 【答案】 $2e^3$

【详解】 题目考察抽象函数在某点处的高阶导数。利用题目已知的函数关系式进行求导便可得出。

$$\text{由 } f'(x) = e^{f(x)}, \text{ 有 } f''(x) = (e^{f(x)})' = e^{f(x)} f'(x) = e^{2f(x)}$$

$$\text{所以 } f'''(x) = (e^{2f(x)})' = e^{2f(x)} (2f(x))' = 2e^{2f(x)} f'(x) = 2e^{3f(x)}$$

$$\text{以 } x=2 \text{ 代入, 得 } f'''(2) = 2e^{3f(2)} = 2e^3.$$

(3) 【答案】 $4dx - 2dy$

【详解】 题目求复合函数在某点处的全微分，可有两种方法：

方法 1： 由微分形式不变性，有

$$dz = f'(4x^2 - y^2) d(4x^2 - y^2) = f'(4x^2 - y^2) (8xdx - 2ydy)$$

$$dz \Big|_{(1,2)} = f'(0) (8dx - 4dy) = 4dx - 2dy$$

方法 2： 求偏导数，

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(4x^2 - y^2) \cdot 8x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(4x^2 - y^2) (-2y).$$

$$\text{以 } x=1, y=2, f'(0) = \frac{1}{2}, \text{ 代入 } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \text{ 便得如上结果.}$$

(4) 【答案】 2

【详解】由已知条件 $BA = B + 2E$ 变形得, $BA - 2E = B \Rightarrow B(A - E) = 2E$, 两边取行列式, 得

$$|B(A - E)| = |2E| = 4|E| = 4$$

$$\text{其中, } |A - E| = \left| \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right| = 2, \quad |2E| = 2^2|E| = 4$$

$$\text{因此, } |B| = \frac{|2E|}{|A - E|} = \frac{4}{2} = 2.$$

(5) 【答案】 1/9

【详解】根据独立性原理: 若事件 $A_1, \dots, A_n$ 独立, 则

$$P\{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n\} = P\{A_1\}P\{A_2\} \cdots P\{A_n\}$$

事件 $\{\max\{X, Y\} \leq 1\} = \{X \leq 1, Y \leq 1\} = \{X \leq 1\} \cap \{Y \leq 1\}$, 而随机变量 X 与 Y 均服从区间 $[0, 3]$ 上的均匀分布, 有 $P\{X \leq 1\} = \int_0^1 \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3}$ 和 $P\{Y \leq 1\} = \int_0^1 \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3}$. 又随机变量 X 与 Y 相互独立, 所以,

$$P\{\max(x, y) \leq 1\} = P\{x \leq 1, Y \leq 1\} = P\{x \leq 1\} \cdot P\{Y \leq 1\} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

(6) 【答案】 2.

【详解】样本方差是总体方差的无偏估计量 $E(S^2) = D(X)$, 故只要计算 $D(X)$ 即可.

X 概率密度函数 $f(x)$ 是偶函数, 则 $xf(x)$ 为奇函数, 所以 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 0$

所以 $E(S^2) = D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2)$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = 2 \int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = - \int_0^{\infty} x^2 de^{-x} \\ &= -x^2 e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} dx^2 = -x^2 e^{-x} \Big|_0^{+\infty} - 2 \int_0^{\infty} x de^{-x} \\ &= -x^2 e^{-x} \Big|_0^{+\infty} - 2xe^{-x} \Big|_0^{+\infty} + 2 \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -0 - 0 + 2[0 - (-1)] = 2. \end{aligned}$$

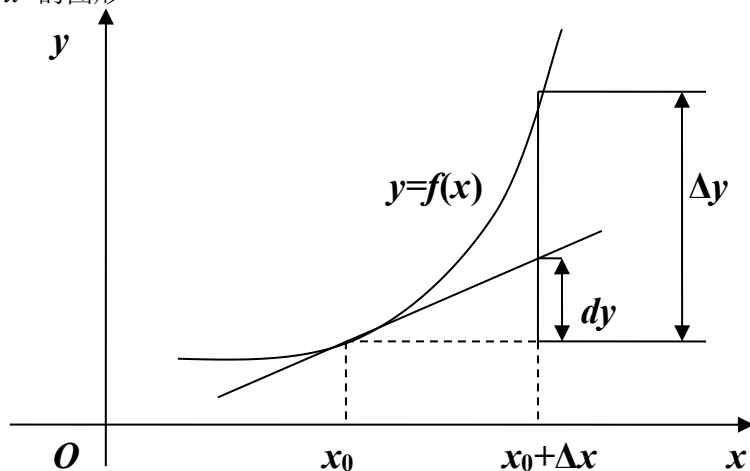
二、选择题

(7) 【答案】 A

【详解】

方法 1: 图示法.

因为 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 严格单调增加; 因为 $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 是凹函数, 又 $\Delta x > 0$, 画 $f(x) = x^2$ 的图形



结合图形分析, 就可以明显得出结论: $0 < dy < \Delta y$.

方法 2: 用两次拉格朗日中值定理

$$\Delta y - dy = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x \quad (\text{前两项用拉氏定理})$$

$$= f'(\xi)\Delta x - f'(x_0)\Delta x \quad (\text{再用一次拉氏定理})$$

$$= f''(\eta)(\xi - x_0)\Delta x, \quad \text{其中 } x_0 < \xi < x_0 + \Delta x, x_0 < \eta < \xi$$

由于 $f''(x) > 0$, 从而 $\Delta y - dy > 0$. 又由于 $dy = f'(x_0)\Delta x > 0$, 故选 [A]

方法 3: 用拉格朗日余项一阶泰勒公式. 泰勒公式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n,$$

其中 $R_n = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^n$. 此时 n 取 1 代入, 可得

$$\Delta y - dy = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x = \frac{1}{2}f''(\xi)(\Delta x)^2 > 0$$

又由 $dy = f'(x_0)\Delta x > 0$, 选 (A).

(8) 【答案】 C

【详解】 题目考察该抽象函数在 0 点处的函数值, 及 0 点处的左右导数, 计算如下:

换元令 $x = h^2$, 由题设可得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2)}{h^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

于是 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} \cdot x = 1 \cdot 0 = 0$

因为函数 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续, 故 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, 进而有

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'_+(0) .$$

这表明 $f(0) = 0$ 且 $f'_+(0)$ 存在. 故应选 (C) .

(9) 【答案】 D

【详解】

方法 1: 数列收敛的性质: 收敛数列的四则运算后形成的新数列依然收敛

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ 也收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$ 收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 也收敛. 选 D.

方法 2: 记 $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 但 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, (p 级数, $p = \frac{1}{2}$ 级数发散);

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$ (p 级数, $p = 1$ 级数发散) 均发散. 由排除法可知, 应选 D.

(10) 【答案】 B

【详解】 线性方程解的性质与结构: 1. 由非齐次线性微分方程的两个特解, 求该方程的通解; 2. 线性非齐次微分方程的两个解的差是对应的齐次微分方程的解.

因为 $y_1(x) \neq y_2(x)$, 所以 $(y_1(x) - y_2(x))$ 是齐次微分方程的一个非零解, C 是任意常数, 所以 $C(y_1(x) - y_2(x))$ 是对应的齐次微分方程的通解. 再加上原非齐次方程的一个特解, 便得原非齐次方程的通解, $[B]$.

(11) 【答案】 D

【详解】

方法 1: 化条件极值问题为一元函数极值问题.

已知 $\varphi(x_0, y_0) = 0$, 由 $\varphi(x, y) = 0$, 在 (x_0, y_0) 邻域, 可确定隐函数 $y = y(x)$,

满足 $y(x_0) = y_0$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} / \frac{\partial \varphi}{\partial y}$.

(x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点 $\Leftrightarrow x = x_0$ 是 $z = f(x, y(x))$ 的极值点. 它的必要条件是

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \frac{dy}{dx} \bigg|_{x=x_0} = f'_x(x_0, y_0) - f'_y(x_0, y_0) \frac{\varphi'_x(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)} \bigg|_{x=x_0} = 0$$

若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$, 或 $\varphi'_x(x_0, y_0) = 0$, 因此不选 (A), (B).

若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ (否则 $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=x_0} \neq 0$). 因此选 (D)

方法 2: 用拉格朗日乘子法. 引入函数 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$, 有

$$\begin{cases} F'_x = f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0 & (1) \\ F'_y = f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0 & (2) \\ F'_\lambda = \varphi'(x, y) = 0 \end{cases}$$

因为 $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$ ，所以 $\lambda = -\frac{f'_y(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)}$ ，代入(1)得

$$f'_x(x_0, y_0) = -\frac{f'_y(x_0, y_0)\varphi'_x(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)}$$

若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ ，则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ ，选(D)

(12) 【答案】A

【详解】

方法1：若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关，则由线性相关定义存在不全为0的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

为了得到 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 的形式，用 A 左乘等式两边，得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + \dots + k_sA\alpha_s = 0 \quad \text{①}$$

于是存在不全为0的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 使得①成立，所以 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关。

方法2：如果用秩来解，则更加简单明了。只要熟悉两个基本性质，它们是：

1. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s$ ；2. $r(AB) \leq r(B)$ 。

矩阵 $(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s) = A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ ，设 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ ，则由

$r(AB) \leq r(B)$ 得 $r(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s$ 。所以答案应该为(A)。

(13) 【答案】B

【详解】用初等矩阵在乘法中的作用(矩阵左乘或右乘初等矩阵相当于对矩阵进行初等行变换或列变换)得出

$$\text{将 } A \text{ 的第2行加到第1行得 } B, \text{ 即 } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \xrightarrow{\text{记}} PA$$

$$\text{将 } B \text{ 的第1列的-1倍加到第2列得 } C, \text{ 即 } C = B \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{记}} BQ$$

$$\text{因为 } PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E, \text{ 故 } Q = P^{-1}E = P^{-1}.$$

从而 $C = BQ = BP^{-1} = PAP^{-1}$, 故选(B).

(14) 【答案】A.

【详解】由于 X 与 Y 的分布不同, 不能直接判断 $P\{|X - \mu_1| < 1\}$ 和 $P\{|Y - \mu_2| < 1\}$ 的大小与参数关系. 如果将其标准化后就可以方便地进行比较了.

随机变量标准化, 有 $\frac{X - \mu_1}{\sigma_1} \sim N(0, 1)$, 且其概率密度函数是偶函数. 所以

$$P(|X - \mu_1| < 1) = P\left(\left|\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}\right| < \frac{1}{\sigma_1}\right) = 2P\left\{0 < \frac{X - \mu_1}{\sigma_1} < \frac{1}{\sigma_1}\right\} = 2[\Phi(\frac{1}{\sigma_1}) - \Phi(0)] = 2\Phi(\frac{1}{\sigma_1}) - 1.$$

$$\text{同理有, } P(|Y - \mu_2| < 1) = 2\Phi(\frac{1}{\sigma_2}) - 1$$

因为 $\Phi(x)$ 是单调递增函数, 当 $P\{|X - \mu_1| < 1\} > P\{|Y - \mu_2| < 1\}$ 时,

$$2\Phi(\frac{1}{\sigma_1}) - 1 > 2\Phi(\frac{1}{\sigma_2}) - 1, \text{ 即 } \frac{1}{\sigma_1} > \frac{1}{\sigma_2}, \text{ 所以 } \sigma_1 < \sigma_2, \text{ 故选(A).}$$

三、解答题

(15) 【详解】题目考察二元函数的极限, 求 $g(x)$ 时, 可以将 y 视为常数

$$(I) \quad g(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\frac{y}{1 + xy} - \frac{1 - y \sin \frac{\pi x}{y}}{\arctan x} \right],$$

$$\text{由于 } x \neq 0, \text{ 所以 } \lim_{y \rightarrow +\infty} y \sin \frac{\pi x}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} y \cdot \frac{\pi x}{y} = \pi x, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{1 + xy} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{y} + x} = \frac{1}{x},$$

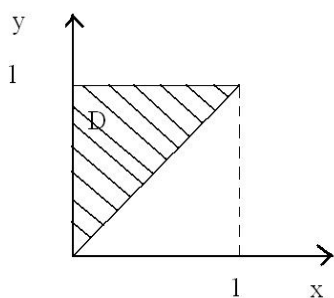
$$\text{所以 } g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1 - \pi x}{\arctan x}.$$

$$(II) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1 - \pi x}{\arctan x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x - x + \pi x^2}{x \arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x - x + \pi x^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1 + 2\pi x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x + 2\pi + 2\pi x^2}{2(1+x^2)} = \pi$$

(16) 【详解】 题目考察二重积分的计算，画出积分区域，化为累次积分即可以很容易求出。计算步骤如下：

积分区域 D 如下图所示. $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$,



$$\text{故} \quad \iint_D \sqrt{y^2 - xy} dx dy = \int_0^1 dy \int_0^y \sqrt{y^2 - xy} dx = -\frac{2}{3} \int_0^1 \sqrt{y} (y-x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^y dy = \frac{2}{3} \int_0^1 y^2 dy = \frac{2}{9}.$$

(17) 【详解】 令 $f(x) = x \sin x + 2 \cos x + \pi x$, 只需证明 $0 < x < \pi$ 时, $f(x)$ 单调增加(严格)

$$f'(x) = \sin x + x \cos x - 2 \sin x + \pi = x \cos x - \sin x + \pi$$

$$f''(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x < 0$$

$\therefore f'(x)$ 单调减少(严格),

又 $f'(\pi) = \pi \cos \pi + \pi = 0$, 故 $0 < x < \pi$ 时 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 单调增加(严格)

由 $b > a$ 有 $f(b) > f(a)$ 得证

(18) 【详解】 (I) 设所求的曲线方程为 $y = y(x)$, 按题意, 在其上任意一点 $P(x, y)$ 处的切线

斜率 y' 与 OP 的斜率 $\frac{y}{x}$ 的差等于 $ax (a > 0, x \neq 0)$, 即有 $y' - \frac{y}{x} = ax$, 并且有初始条件

$y(1) = 0$. 解之, 按一阶线性微分方程解的公式, 有

$$y = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left[\int ax e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right] = e^{\ln x} \left[\int ax e^{-\ln x} dx + C \right] = x \left[\int a dx + C \right] = x(ax + C)$$

(以上 $\int \frac{1}{x} dx$ 不写成 $\ln|x|$ 而可以写成 $\ln x$ 的原因是, 题中有初始条件 $y(1)=0$, x 取在 1 处而微分方程的解应是连续的, 题设 $x \neq 0$, 故其解只能取在包含 $x=1$ 而不跨过 $x=0$ 区间, 故 $x > 0$, 因此 $\ln|x|$ 可以写成 $\ln x$).

再由 $y(1)=0$ 定出 $C=-a$, 于是所求的曲线方程为 $y = ax(x-1), a > 0$.

(II) 直线 $y = ax$ 与曲线 $y = ax(x-1)$ 的交点 $(0,0)$ 与 $(2,2a)$. 所以直线 $y = ax$ 与曲线

$y = ax(x-1)$ 所围平面图形的面积为

$$S(a) = \int_0^2 [ax - ax(x-1)] dx = \int_0^2 [2ax - ax^2] dx = \frac{4}{3}a$$

按题意, $\frac{4}{3}a = \frac{8}{3}$, 故 $a = 2$.

(19) 【详解】

$$\text{记 } u_n = \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)}, \text{ 有 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)}}{\frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)}} \right| = x^2$$

所以, 当 $x^2 < 1$ 即 $|x| < 1$ 时, 原级数绝对收敛;

当 $x^2 > 1$, 即 $|x| > 1$ 时, 原级数通项不趋于 0, 级数发散,

所以, 收敛半径 $R=1$. 在 $x = \pm 1$ 处 $u_n = \frac{\pm(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 故收敛域为 $[-1,1]$.

求和函数, 应在收敛区间内进行, 即 $x \in [-1,1]$,

$$\text{由 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)} \quad \text{令 } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}$$

$$\text{有 } f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$f''(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} \right)' = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2}$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{2}{1+x^2}.$$

再倒回去, 有 $f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t)dt = 0 + \int_0^x \frac{2}{1+t^2}dt = 2 \arctan x$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t)dt = 0 + 2 \int_0^x \arctan t dt \\ &= 2 \left[\arctan t \Big|_0^x - \int_0^x \frac{2}{1+t^2} dt \right] = 2x \arctan t - \ln(1+x^2). \end{aligned}$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)} = 2x^2 \arctan x - x \ln(1+x^2), -1 < x < 1.$

又因在 $x = \pm 1$ 处级数收敛, 右边和函数的表达式在 $x = \pm 1$ 处连续, 因此, 在 $x = \pm 1$ 处上式仍成立, 即有

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)} = 2x^2 \arctan x - x \ln(1+x^2), -1 \leq x \leq 1$$

(20) 【详解】

方法 1: 记 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$, 则

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix} \quad \text{把所有列都加到第一列} \\ &= \begin{vmatrix} 10+a & 2 & 3 & 4 \\ 10+a & 2+a & 3 & 4 \\ 10+a & 2 & 3+a & 4 \\ 10+a & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix} \quad \text{把第一列公因式}(10+a)\text{提到行列式前面} \\ &= (10+a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix} = (10+a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = (a+10)a^3 \end{aligned}$$

线性相关的定义: 存在一组不等于零的数 k_1, k_2, k_3, k_4 , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = 0$

成立, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.

于是当 $|A| = 0$ 时方程组 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = 0$ 有非零解, 此时满足线性相关的定

义. 即: $(a+10)a^3 = 0$, 解得当 $a = 0$ 或 $a = -10$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.

当 $a = 0$ 时, α_1 为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组, 且 $\alpha_2 = 2\alpha_1, \alpha_3 = 3\alpha_1, \alpha_4 = 4\alpha_1$.

当 $a = -10$ 时, 对 A 作初等行变换.

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -8 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} [2]+[1] \times (-1) \\ [3]+[1] \times (-1) \\ [4]+[1] \times (-1) \end{matrix}} \begin{bmatrix} -9 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & -10 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & -10 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} [2] \times 1/10 \\ [3] \times 1/10 \\ [4] \times 1/10 \end{matrix}} \begin{bmatrix} -9 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} [1]+[4] \times 4 \\ [1]+[3] \times 3 \\ [1]+[2] \times 2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4]$$

可以看出由于 $\beta_2, \beta_3, \beta_4$ 为 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 的一个极大线性无关组, 且 $\beta_1 = -\beta_2 - \beta_3 - \beta_4$,

故 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组, 且 $\alpha_1 = -\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4$.

方法 2: 记 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$, 对 A 施以初等行变换, 有

$$A = \begin{bmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} [2]+[1] \times (-1) \\ [3]+[1] \times (-1) \\ [4]+[1] \times (-1) \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ -a & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 & a \end{bmatrix} = B$$

$$\text{当 } a = 0 \text{ 时, } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 得 } r(A) = r(B) = 1, \text{ 因而 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \text{ 线性相关,}$$

此时 α_1 为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组, 且 $\alpha_2 = 2\alpha_1, \alpha_3 = 3\alpha_1, \alpha_4 = 4\alpha_1$.

$a \neq 0$ 时, 再对 B 施以初等行变换, 有

$$B \xrightarrow{\begin{matrix} [2] \div a \\ [3] \div a \\ [4] \div a \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} [1]+[4] \times 4 \\ [1]+[3] \times 3 \\ [1]+[2] \times 2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} a+10 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = C = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4].$$

如果 $a \neq -10$, C 的秩为 4, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关; 如果 $a = -10$ 时, C 的秩为 3, 故

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关. 由于 $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 是 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 的一个极大线性无关组, 且

$\gamma_1 = -\gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$, 于是 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组,

$\alpha_1 = -\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4$.

(21)【详解】(I) 由题设条件 $A\alpha_1 = 0 = 0\alpha_1$, $A\alpha_2 = 0 = 0\alpha_2$, 故 α_1, α_2 是 A 的对应于 $\lambda = 0$ 的特征向量, 又因为 α_1, α_2 线性无关, 故 $\lambda = 0$ 至少是 A 的二重特征值. 又因为 A 的每行元素之和为 3, 所以有 $A(1,1,1)^T = (3,3,3)^T = 3(1,1,1)^T$, 由特征值、特征向量的定义, $\alpha_0 = (1,1,1)^T$ 是 A 的特征向量, 特征值为 $\lambda_3 = 3$, λ_3 只能是单根, $k_3\alpha_0, k_3 \neq 0$ 是全体特征向量, 从而知 $\lambda = 0$ 是二重特征值.

于是 A 的特征值为 $3, 0, 0$; 属于 3 的特征向量: $k_3\alpha_3, k_3 \neq 0$; 属于 0 的特征向量: $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$, k_1, k_2 不都为 0.

(II) 为了求出可逆矩阵必须对特征向量进行单位正交化.

先将 α_0 单位化, 得 $\eta_0 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})^T$.

对 α_1, α_2 作施密特正交化, 得 $\eta_1 = (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$, $\eta_2 = (-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6})^T$.

作 $Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, 则 Q 是正交矩阵, 并且 $Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(III) 由 $Q^T A Q = \Lambda$, 其中 $Q^T = Q^{-1}$

$$\begin{aligned} A = Q \Lambda Q^T &= \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A - \frac{3}{2}E)^6 &= (Q\Lambda Q^T - \frac{3}{2}E)^6 = (Q(\Lambda - \frac{3}{2}E)Q^T)^6 = Q(\Lambda - \frac{3}{2}E)^6 Q^T \\
&= Q \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & & \\ & \frac{3}{2} & \\ & & \frac{3}{2} \end{bmatrix} Q^{-1} = Q \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & & \\ & -\frac{3}{2} & \\ & & \frac{3}{2} \end{bmatrix} Q^T \\
&= (\frac{3}{2})^6 QEQ^T = (\frac{3}{2})^6 QQ^T = (\frac{3}{2})^6 E
\end{aligned}$$

(22) 【详解】 $f_Y(y) = F'_Y(y)$, 由于 $f_X(x)$ 是分段函数, 所以在计算 $P\{X^2 \leq y\}$ 时, 要相应分段讨论. 求 $F(-\frac{1}{2}, 4) = P(X \leq -\frac{1}{2}, Y \leq 4) = P(X \leq -\frac{1}{2}, X^2 \leq 4)$, 只是与 X 有关, 不必先求出 $F(x, y)$ 的函数.

(I) 因为 $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\}$, 当 $y < 0$ 时, $F_Y(y) = 0$;

当 $0 \leq y < 1$ 时, $F_Y(y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^0 \frac{1}{2} dx + \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{4} dx = \frac{3}{4}\sqrt{y}$;

当 $1 \leq y < 4$ 时, $F_Y(y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-1}^0 \frac{1}{2} dx + \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{4} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{y}$;

当 $y \geq 4$ 时, $F_Y(y) = 1$;

综上所述, 有

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\} = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{3}{4}\sqrt{y}, & 0 \leq y < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{y}, & 1 \leq y < 4 \\ 1, & 4 \leq y \end{cases}$$

由概率密度是分布函数在对应区间上的微分, 所以,

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0 < y < 1 \\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1 \leq y < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

这个解法是从分布函数的最基本的概率定义入手, 对 y 进行适当的讨论即可, 属于基本题型.

(II) 由协方差的计算公式 $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, X^2) = E(X^3) - E(X) \cdot E(X^2)$

需要计算 $E(X)$, $E(X^2)$, $E(X^3)$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx = \int_{-1}^0 \frac{x}{2}dx + \int_0^2 \frac{x}{4}dx = \frac{1}{4};$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_{-1}^0 \frac{x^2}{2}dx + \int_0^2 \frac{x^2}{4}dx = \frac{5}{6};$$

$$E(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_X(x)dx = \int_{-1}^0 \frac{x^3}{2}dx + \int_0^2 \frac{x^3}{4}dx = \frac{7}{8}.$$

$$\text{故 } \text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, X^2) = E(X^3) - E(X) \cdot E(X^2) = \frac{7}{8} - \frac{1}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{2}{3}.$$

(III) 根据二维随机变量的定义 $F(a, b) = P\{X \leq a, Y \leq b\}$, 有

$$F(-\frac{1}{2}, 4) = P(X \leq -\frac{1}{2}, Y \leq 4) = P\left\{X \leq -\frac{1}{2}, X^2 \leq 4\right\} = P\left\{-2 \leq X \leq -\frac{1}{2}\right\}$$

由一维概率计算公式 $P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f_X(x)dx$ 有, $F(-\frac{1}{2}, 4) = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{4}$.

(23) 【答案】 $\hat{\theta} = \frac{3}{2} - \bar{X}$; θ 的最大似然估计 $\hat{\theta} = \frac{N}{n}$.

【详解】矩估计的实质在于用样本矩来估计相应的总体矩, 此题中被估参数只有一个, 故只需要用样本一阶原点矩(样本均值)来估计总体的一阶原点矩(期望), 所以矩估计的关键在于找出总体的矩 $E(X)$.

最大似然估计, 实质上就是找出使似然函数最大的那个参数, 问题的关键在于构造似然函数. 样本值中 x_i 小于 1 的概率是 θ , x_i 大于 1 的概率是 $(1-\theta)$. 因此, 似然函数应为:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \theta^N (1-\theta)^{n-N}.$$

(I) 由数学期望的定义:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x; \theta)dx = \int_0^1 \theta x dx + \int_1^2 (1-\theta)x dx = \frac{1}{2}\theta + \frac{3}{2}(1-\theta) = \frac{3}{2} - \theta$$

样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

用样本均值估计期望有 $EX = \bar{X}$ 即 $\frac{3}{2} - \theta = \bar{X}$, 解得 $\theta = \frac{3}{2} - \bar{X}$.

所以参数 θ 的矩估计为 $\hat{\theta} = \frac{3}{2} - \bar{X}$. 其中 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

(II) 对样本 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 按照 <1 或者 ≥ 1 进行分类, 不妨设: $x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pN} < 1$,

$x_{pN+1}, x_{pN+2}, \dots, x_{pn} \geq 1$. 似然函数

$$L(\theta) = \begin{cases} \theta^N (1-\theta)^{n-N}, & x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pN} < 1, x_{pN+1}, x_{pN+2}, \dots, x_{pn} \geq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

在 $x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pN} < 1$, $x_{pN+1}, x_{pN+2}, \dots, x_{pn} \geq 1$ 时, 等式两边同取自然对数得

$$\ln L(\theta) = N \ln \theta + (n - N) \ln(1 - \theta),$$

由于 $\ln L(\theta)$ 和 $L(\theta)$ 在 θ 的同一点取得最大值, 所以令

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{N}{\theta} - \frac{n - N}{1 - \theta} = 0,$$

解得 $\theta = \frac{N}{n}$, 所以 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta} = \frac{N}{n}$.