

2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题

(1) 【详解】先求出函数的导数,再求函数在某点的微分.

方法 1: 利用恒等变形得 $y = (1 + \sin x)^x = e^{x \ln(1 + \sin x)}$, 于是

$$y' = e^{x \ln(1 + \sin x)} \cdot [\ln(1 + \sin x) + x \cdot \frac{\cos x}{1 + \sin x}],$$

$$\text{从而} \quad dy \Big|_{x=\pi} = y'(\pi)dx = -\pi dx.$$

方法 2: 两边取对数, $\ln y = x \ln(1 + \sin x)$, 对 x 求导, 得

$$\frac{1}{y} y' = \ln(1 + \sin x) + \frac{x \cos x}{1 + \sin x},$$

$$\text{于是} \quad y' = (1 + \sin x)^x \cdot [\ln(1 + \sin x) + x \cdot \frac{\cos x}{1 + \sin x}],$$

$$\text{故} \quad dy \Big|_{x=\pi} = y'(\pi)dx = -\pi dx.$$

(2) 曲线 $y = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为 _____.

【详解】由求斜渐近线公式 $y = ax + b$ (其中 $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$), 得:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{x\sqrt{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} = \frac{3}{2},$$

于是所求斜渐近线方程为 $y = x + \frac{3}{2}$.

(3) 【详解】通过还原变换求定积分

方法 1: 令 $x = \sin t$ ($0 < t < \frac{\pi}{2}$), 则

$$\int_0^1 \frac{x dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \cos t}{(2-\sin^2 t) \cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{2-\sin^2 t} dt$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \cos t}{1 + \cos^2 t} = -\arctan(\cos t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

方法 2: 令 $\sqrt{1-x^2} = t$, 有 $x^2 = 1-t^2$, 所以有 $x dx = -t dt$, 其中 $0 < t < 1$.

$$\int_0^1 \frac{x dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \frac{-dt}{1+t^2} = \arctan t \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

(4) 【答案】 $y = \frac{1}{3}x \ln x - \frac{1}{9}x$.

【详解】 求方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 的解, 有公式

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right] \quad (\text{其中 } C \text{ 是常数}).$$

将原方程等价化为 $y' + \frac{2}{x}y = \ln x$, 于是利用公式得方程的通解

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left[\int \ln x \cdot e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right] \\ &= \frac{1}{x^2} \cdot \left[\int x^2 \ln x dx + C \right] = \frac{1}{3}x \ln x - \frac{1}{9}x + \frac{C}{x^2}, \quad (\text{其中 } C \text{ 是常数}) \end{aligned}$$

由 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 得 $C = 0$, 故所求解为 $y = \frac{1}{3}x \ln x - \frac{1}{9}x$.

(5) 【详解】 由题设,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}}{kx^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x + 1 - \cos x}{kx^2 (\sqrt{1+x \arcsin x} + \sqrt{\cos x})} \\ &= \frac{1}{2k} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x + 1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2k} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \right], \end{aligned}$$

$$\text{又因为 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \stackrel{\arcsin x = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = 1$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{3}{4k}$$

由题设 $x \rightarrow 0$ 时 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, 所以 $\frac{3}{4k} = 1$, 得 $k = \frac{3}{4}$.

(6) 【答案】 2

【详解】

方法 1: 因为 $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$$(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix},$$

故 $B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$,

记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 两边取行列式, 于是有

$$|B| = |A| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times 2 = 2.$$

方法 2: 利用行列式性质(在行列式中, 把某行的各元素分别乘以非零常数加到另一行的对应元素上, 行列式的值不变; 从某一行或列中提取某一公因子行列式值不变)

$$\begin{aligned} |B| &= |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3| \\ &\stackrel{[2]-[1]}{=} |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_2 + 8\alpha_3| \stackrel{[3]-2[2]}{=} |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_3| \\ &= 2 |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_3| \stackrel{[1]-[3]}{=} 2 |\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3| \stackrel{[1]-[2]}{=} 2 |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| \end{aligned}$$

又因为 $|A| = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 1$, 故 $|B| = 2|A| = 2$.

二、选择题

(7) 【答案】C

【详解】分段讨论, 并应用夹逼准则,

当 $|x| < 1$ 时, 有 $\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{1+|x|^{3n}} \leq \sqrt[n]{2}$, 命 $n \rightarrow \infty$ 取极限, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$,

由夹逼准则得 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+|x|^{3n}} = 1$;

当 $|x| = 1$ 时, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$;

当 $|x| > 1$ 时, $|x|^3 = \sqrt[n]{|x|^{3n}} < \sqrt[n]{1+|x|^{3n}} \leq \sqrt[n]{2|x|^{3n}} = \sqrt[n]{2}|x|^3$, 命 $n \rightarrow \infty$ 取极限, 得

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2|x|^{3n}} = |x|^3$, 由夹逼准则得 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} |x|^3 \left(\frac{1}{|x|^{3n}} + 1 \right)^{\frac{1}{n}} = |x|^3$.

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ |x^3|, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

再讨论 $f(x)$ 的不可导点. 按导数定义, 易知 $x = \pm 1$ 处 $f(x)$ 不可导, 故应选(C).

(8) 【答案】A

【详解】

方法 1: 应用函数奇偶性的定义判定,

函数 $f(x)$ 的任一原函数可表示为 $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$, 且 $F'(x) = f(x)$.

当 $F(x)$ 为偶函数时, 有 $F(-x) = F(x)$, 于是 $F'(-x) \cdot (-1) = F'(x)$, 即

$-f(-x) = f(x)$, 亦即 $f(-x) = -f(x)$, 可见 $f(x)$ 为奇函数;

反过来, 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt + C$, 令 $t = -k$, 则有 $dt = -dk$,

所以 $F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt + C = -\int_0^x f(-k)dk + C = \int_0^x f(k)dk + C = F(x)$,

从而 $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$ 为偶函数, 可见(A)为正确选项.

方法 2: 排除法,

令 $f(x) = 1$, 则取 $F(x) = x + 1$, 排除(B)、(C);

令 $f(x) = x$, 则取 $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, 排除(D);

(9) 【答案】A

【详解】当 $x = 3$ 时, 有 $t^2 + 2t = 3$, 得 $t_1 = 1, t_2 = -3$ (舍去, 此时 y 无意义),

$$\text{曲线 } y = y(x) \text{ 的导数为 } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{1+t}}{2t+2} = \frac{1}{2(t+1)^2},$$

所以曲线 $y = y(x)$ 在 $x = 3$ (即 $t = 1$) 处的切线斜率为 $\frac{1}{8}$

于是在该处的法线的斜率为 -8 , 所以过点 $(3, \ln 2)$ 的法线方程为

$$y - \ln 2 = -8(x - 3),$$

令 $y = 0$, 得其与 x 轴交点的横坐标为: $\frac{1}{8}\ln 2 + 3$, 故应(A).

(10) 【答案】D

【详解】由于积分区域 D 是关于 $y = x$ 对称的, 所以 x 与 y 互换后积分值不变, 所以有

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma &= \iint_D \frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \left[\frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} + \frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} \right] d\sigma \\ &= \frac{a+b}{2} \iint_D d\sigma = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 = \frac{a+b}{2} \pi. \quad \text{应选(D).} \end{aligned}$$

(11) 【答案】B

【详解】因为 $\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(x+y) + \varphi'(x-y) + \psi(x+y) - \psi(x-y)$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(x+y) - \varphi'(x-y) + \psi(x+y) + \psi(x-y),$$

$$\text{于是 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(x+y) + \varphi''(x-y) + \psi'(x+y) - \psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \varphi''(x+y) - \varphi''(x-y) + \psi'(x+y) + \psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi''(x+y) + \varphi''(x-y) + \psi'(x+y) - \psi'(x-y),$$

可见有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, 应选(B).

(12) 【答案】D

【详解】由于函数 $f(x)$ 在 $x=0$, $x=1$ 点处无定义, 因此是间断点.

且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$, 所以 $x=0$ 为第二类间断点;

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$, 所以 $x=1$ 为第一类间断点, 故应选(D).

(13) 【答案】B

【详解】

方法 1: 利用线性无关的定义

α_1, α_2 分别是特征值 λ_1, λ_2 对应的特征向量, 根据特征值、特征向量的定义, 有

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2 \Rightarrow A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2.$$

设有数 k_1, k_2 , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2A(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$, 则

$$k_1\alpha_1 + k_2\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0 \Rightarrow (k_1 + k_2\lambda_1)\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0.$$

因 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 因不同特征值对应的特征向量必线性无关, 故 α_1, α_2 线性无关, 则

$$\begin{cases} k_1 + k_2\lambda_1 = 0, \\ k_2\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

当 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 \neq 0$ 时, 方程只有零解, 则 $k_1 = 0, k_2 = 0$, 此时 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性

无关; 反过来, 若 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关, 则必然有 $\lambda_2 \neq 0$ (否则, α_1 与

$A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1$ 线性相关), 故应选(B).

方法 2: 将向量组的表出关系表示成矩阵形式

α_1, α_2 分别是特征值 λ_1, λ_2 对应的特征向量, 根据特征值、特征向量的定义, 有

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2 \Rightarrow A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2.$$

$$\text{由于 } (\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)) = (\alpha_1, \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

因 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 因不同特征值对应的特征向量必线性无关, 知 α_1, α_2 线性无关. 若 $\alpha_1,$

$A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关, 则 $r(\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)) = 2$, 则

$$2 = r\left((\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right) \leq \min\left\{r(\alpha_1, \alpha_2), r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right\} \leq r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \leq 2,$$

故 $2 \leq r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \leq 2$ 从而 $r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = 2$, 从而 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 \neq 0$

若 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 \neq 0$, 则 $r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = 2$, 又 α_1, α_2 线性无关, 则

$$r\left((\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right) = r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = 2,$$

则

$$r(\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)) = r\left((\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right) = 2$$

从而 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充要条件是 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 \neq 0$. 故应选(B).

方法 3: 利用矩阵的秩

α_1, α_2 分别是特征值 λ_1, λ_2 对应的特征向量, 根据特征值、特征向量的定义, 有

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2 \Rightarrow A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2.$$

因 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 因不同特征值对应的特征向量必线性无关, 故 α_1, α_2 线性无关, 又

$$A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2, \text{ 故 } \alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2) \text{ 线性无关} \Leftrightarrow r(\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)) = 2$$

$$\text{又因为 } (\alpha_1, \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) \xrightarrow{\text{将}\alpha_1\text{的}-\lambda_1\text{倍加到第2列}} = (\alpha_1, \lambda_2\alpha_2)$$

则 $r(\alpha_1, \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = r(\alpha_1, \lambda_2\alpha_2) = 2 \Leftrightarrow \lambda_2 \neq 0$ (若 $\lambda_2 = 0$, 与 $r(\alpha_1, \lambda_2\alpha_2) = 2$ 矛盾)

方法 4: 利用线性齐次方程组

α_1, α_2 分别是特征值 λ_1, λ_2 对应的特征向量, 根据特征值、特征向量的定义, 有

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2 \Rightarrow A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2.$$

由 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 因不同特征值对应的特征向量必线性无关, 故 α_1, α_2 线性无关,

$\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关

$\Leftrightarrow \alpha_1, \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$ 线性无关

$$\Leftrightarrow |\alpha_1, \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2| \neq 0,$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1, \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2)X = 0 \text{ 只有零解, 又 } (\alpha_1, \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \text{ 只有零解}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2 \text{ 线性无关时 } (\alpha_1, \alpha_2)Y = 0 \text{ 只有零解, 故 } Y = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \text{ 只有零解,}$$

$$\Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \text{ 的系数矩阵是个可逆矩阵,}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 \neq 0, \text{ 故应选(B)}$$

方法 5: 由 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, α_1, α_2 线性无关

α_1, α_2 分别是特征值 λ_1, λ_2 对应的特征向量, 根据特征值、特征向量的定义, 有

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2 \Rightarrow A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2.$$

向量组 (I): α_1, α_2 和向量组 (II): $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$. 显然向量组 (II) 可

以由向量组 (I) 线性表出; 当 $\lambda_2 \neq 0$ 时, 不论 λ_1 的取值如何, 向量组 (I) 可以由向量组

(II) 线性表出

$$\alpha_1 = \alpha_1, \alpha_2 = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\alpha_1\right) + \frac{1}{\lambda_2}(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\alpha_1 + \frac{1}{\lambda_2}A(\alpha_1 + \alpha_2),$$

从而 (I), (II) 是等价向量组 $\Rightarrow$ 当 $\lambda_2 \neq 0$ 时, $r(\alpha_1, \alpha_2) = r(\alpha_1, \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = 2$

(14) 【答案】(C)

【详解】

方法 1: 由题设, 存在初等矩阵 E_{12} (交换 n 阶单位矩阵的第 1 行与第 2 行所得), 使得

$$E_{12}A = B, (A \text{ 进行行变换, 故 } A \text{ 左乘初等矩阵}), \text{ 于是 } B^* = (E_{12}A)^* = A^*E_{12}^*,$$

$$\text{又初等矩阵都是可逆的, 故 } E_{12}^{-1} = \frac{E_{12}^*}{|E_{12}|},$$

又 $|E_{12}| = -|E| = -1$ (行列式的两行互换, 行列式反号), $E_{12}^{-1} = E_{12}$, 故

$$B^* = A^*E_{12}^* = A^*|E_{12}| \cdot E_{12}^{-1} = -A^*E_{12}^{-1} = -A^*E_{12},$$

即 $A^*E_{12} = -B^*$, 可见应选(C).

方法 2: 交换 A 的第一行与第二行得 B , 即 $B = E_{12}A$.

又因为 A 是可逆阵, $|E_{12}| = -|E| = -1$, 故 $|B| = |E_{12}A| = |E_{12}||A| = -|A| \neq 0$,

所以 B 可逆, 且 $B^{-1} = (E_{12}A)^{-1} = A^{-1}E_{12}$.

$$\text{又 } A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}, B^{-1} = \frac{B^*}{|B|}, \text{ 故 } \frac{B^*}{|B|} = \frac{A^*}{|A|} E_{12}, \text{ 又因 } |B| = -|A|, \text{ 故 } A^* E_{12} = -B^*.$$

三、解答题

(15) 【详解】 作积分变量代换, 命 $x-t=u$, 则

$$\int_0^x f(x-t)dt = \int_x^0 f(u)(-du) = \int_0^x f(u)du,$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t)dt}{x \int_0^x f(u)du} \stackrel{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(u)du + xf(x)}$$

$$\stackrel{\text{整理}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(u)du + xf(x)} \stackrel{\text{上下同除}x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt}{f(x) + \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt}$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\int_0^x f(t)dt)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

所以由极限的四则运算法则得,

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt}{f(x) + \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt}{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt} = \frac{f(0)}{f(0) + f(0)} \stackrel{f(0) \neq 0}{=} \frac{1}{2}.$$

(16) 【详解】 由题设图形知, C_3 在 C_1 的左侧, 根据平面图形的面积公式得,

$$S_1(x) = \int_0^x [e^t - \frac{1}{2}(1+e^t)]dt = \frac{1}{2}(e^x - x - 1),$$

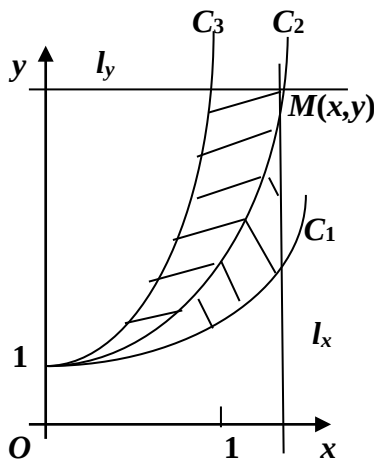
$$S_2(y) = \int_1^y (\ln t - \varphi(t))dt,$$

由 $S_1(x) = S_2(y)$, 得

$$\frac{1}{2}(e^x - x - 1) = \int_1^y (\ln t - \varphi(t))dt,$$

注意到 $M(x, y)$ 是 $y = e^x$ 的点,

$$\text{于是 } \frac{1}{2}(y - \ln y - 1) = \int_1^y (\ln t - \varphi(t))dt$$



两边对 y 求导得 $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{y}) = \ln y - \varphi(y)$,

整理上面关系式得函数关系为: $x = \varphi(y) = \ln y - \frac{y-1}{2y}$.

(17)【详解】由直线 l_1 过 $(0,0)$ 和 $(2,4)$ 两点知直线 l_1 的斜率为 2. 由直线 l_1 是曲线 C 在点 $(0,0)$ 的切线, 由导数的几何意义知 $f'(0) = 2$. 同理可得 $f'(3) = -2$. 另外由点 $(3,2)$ 是曲线 C 的一个拐点知 $f''(3) = 0$.

由分部积分公式,

$$\begin{aligned}\int_0^3 (x^2+x) f'''(x) dx &= \int_0^3 (x^2+x) df''(x) = (x^2+x) f''(x) \Big|_0^3 - \int_0^3 f''(x)(2x+1) dx \\&= (3^2+3) f''(3) - (0^2+0) f''(0) - \int_0^3 f''(x)(2x+1) dx \\&= - \int_0^3 (2x+1) df'(x) = -(2x+1) f'(x) \Big|_0^3 + 2 \int_0^3 f'(x) dx \\&= -(2 \times 3 + 1) f'(3) + (2 \times 0 + 1) f'(0) + 2 \int_0^3 f'(x) dx \\&= 16 + 2[f(3) - f(0)] = 20.\end{aligned}$$

(18)【详解】由题设 $x = \cos t (0 < t < \pi)$, 有 $\frac{dx}{dt} = -\sin t$, 由复合函数求导的链式法则得

$$y' = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\sin t} \frac{dy}{dt}, \quad y'' = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \left[\frac{\cos t}{\sin^2 t} \frac{dy}{dt} - \frac{1}{\sin t} \frac{d^2 y}{dt^2} \right] \cdot \left(-\frac{1}{\sin t} \right),$$

代入原方程, $(1-\cos^2 t) \left[\frac{\cos t}{\sin^2 t} \frac{dy}{dt} - \frac{1}{\sin t} \frac{d^2 y}{dt^2} \right] \cdot \left(-\frac{1}{\sin t} \right) - \cos t \left(-\frac{1}{\sin t} \frac{dy}{dt} \right) + y = 0$,

化简得 $\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0$, 其特征方程为 $r^2 + 1 = 0$, 特征根 $r_{1,2} = \pm i$, 通解为 $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$

所以 $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t = C_1 x + C_2 \sqrt{1-x^2}$,

将初始条件 $y|_{x=0} = 1$, 代入得, $1 = C_1 \times 0 + C_2 \sqrt{1-0^2} = C_2$, 即 $C_2 = 1$.

而 $y' = C_1 x' + C_2 (\sqrt{1-x^2})' = C_1 + \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}$,

将 $y'|_{x=0} = 2$ 代入得 $2 = C_1 + \frac{2 \times 0}{2\sqrt{1-0^2}} = C_1$, 即 $C_1 = 2$.

将 $C_1 = 2, C_2 = 1$ 代入通解公式得满足条件的特解为 $y = 2x + \sqrt{1-x^2}$, $-1 < x < 1$.

(19) 【详解】

(I) 令 $F(x) = f(x) - 1 + x$, 则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $F(0) = -1 < 0$, $F(1) = 1 > 0$,

于是由闭区间连续函数的介值定理知, 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = 1 - \xi$.

(II) 在 $[0, \xi]$ 和 $[\xi, 1]$ 上对 $f(x)$ 分别应用拉格朗日中值定理, 知存在两个不同的点

$$\eta \in (0, \xi), \zeta \in (\xi, 1), \text{ 使得 } f'(\eta) = \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0}, \quad f'(\zeta) = \frac{f(1) - f(\xi)}{1 - \xi}$$

$$\text{于是 } f'(\eta)f'(\zeta) = \frac{f(\xi)}{\xi} \cdot \frac{1 - f(\xi)}{1 - \xi} = \frac{1 - \xi}{\xi} \cdot \frac{\xi}{1 - \xi} = 1.$$

(20) 【详解】由 $dz = 2xdx - 2ydy$ 知 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = -2y$. 对 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ 两边积分得

$z = f(x, y) = x^2 + c(y)$. 将 $z(x, y) = x^2 + c(y)$ 代入 $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$ 得 $c'(y) = -2y$. 所以

$c(y) = -y^2 + c$. 所以 $z = x^2 - y^2 + c$. 再由 $x = 1, y = 1$ 时 $z = 2$ 知, $c = 2$. 于是所讨论的函

数为 $z = x^2 - y^2 + 2$.

求 z 在 $x^2 + \frac{y^2}{4} < 1$ 中的驻点. 由 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = -2y$ 得驻点 $(0, 0)$, 对应的

$$z = f(0, 0) = 2.$$

讨论 $z = x^2 - y^2 + 2$ 在 D 的边界 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 上的最值, 有两个方法.

方法 1: 把 $y^2 = 4(1 - x^2)$ 代入 z 的表达式, 有

$$z = x^2 - y^2 + 2 = 5x^2 - 2, \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$z'_x = 10x$$

命 $z'_x = 0$ 解得 $x = 0$ ，对应的 $y = \pm 2$ ， $z|_{x=0, y=\pm 2} = -2$

还要考虑 $-1 \leq x \leq 1$ 的端点 $x = \pm 1$ ，对应的 $y = 0$ ， $z|_{x=\pm 1, y=0} = 3$

由 $z = 2, z = -2, z = 3$ 比较大小，故

$\min z = -2$ (对应于 $x = 0, y = \pm 2$)， $\max z = 3$ (对应于 $x = \pm 1, y = 0$)

方法 2: 用拉格朗日乘数法，作函数 $F(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 + 2 + \lambda(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1)$

$$\text{解方程组} \begin{cases} F'_x = \frac{\partial f}{\partial x} + 2\lambda x = 2(1 + \lambda)x = 0, \\ F'_y = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\lambda y}{2} = -2y + \frac{1}{2}\lambda y = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0 \end{cases}$$

由上面的第一个方程解得 $x = 0$ 或 $\lambda = -1$ ：当 $x = 0$ 时由最后一个方程解得 $y = \pm 2$ ；当

$\lambda = -1$ 是由第二个方程解得 $y = 0$ ，这时由最后一个方程解得 $x = \pm 1$ 。故解得 4 个可能的极

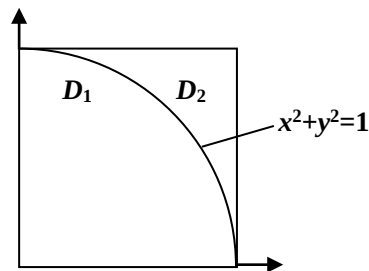
值点 $(0, 2), (0, -2), (1, 0), (-1, 0)$ 。计算对应 z 的值：

$$z|_{(0,2)} = -2, \quad z|_{(0,-2)} = -2, \quad z|_{(1,0)} = 3, \quad z|_{(-1,0)} = 3$$

再与 $z|_{(0,0)} = 2$ 比较大小，结论同方法 1。

(21) 【详解】 $D: x^2 + y^2 - 1 = 0$ 为以 O 为中心半径为 1 的圆周，划分 D 如下图为 D_1 与 D_2 。

$$\text{这时可以去掉绝对值符号 } |x^2 + y^2 - 1| = \begin{cases} x^2 + y^2 - 1, & (x, y) \in D_2 \\ 1 - x^2 - y^2, & (x, y) \in D_1 \end{cases}$$



$$\text{方法 1: } \iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma = - \iint_{D_1} (x^2 + y^2 - 1) dx dy + \iint_{D_2} (x^2 + y^2 - 1) dx dy$$

后一个积分用直角坐标做，

$$\begin{aligned}
\iint_{D_2} (x^2 + y^2 - 1) dx dy &= \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 (x^2 + y^2 - 1) dy \\
&= \int_0^1 [(x^2 - 1) - (x^2 - 1)\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}] dx \\
&= \int_0^1 [(x^2 - \frac{2}{3}) + \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}] dx = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 \frac{2}{3} dx + \frac{2}{3} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\
&= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1+\cos 2t}{2})^2 dt \\
&= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t) dt \\
&= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2}) dt \\
&= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \frac{1}{2} + 2\cos 2t + \frac{\cos 4t}{2}) dt \\
&= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos 2t + \frac{\cos 4t}{2}) dt \\
&= -\frac{1}{3} + \frac{\pi}{8} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times 0 = -\frac{1}{3} + \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

前一个积分用极坐标做，

$$\iint_{D_1} (1 - x^2 - y^2) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (1 - r^2) r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) d\theta = \frac{\pi}{8}.$$

所以
$$\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma = \frac{\pi}{8} + -\frac{1}{3} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.$$

方法 2: 由于区域 D_2 的边界复杂，计算该积分较麻烦，可以将 D_2 内的函数“扩充”到整个区

域 $D = D_1 \cup D_2$ ，再减去“扩充”的部分，就简化了运算。即

因此
$$\begin{aligned}
\iint_{D_2} (x^2 + y^2 - 1) d\sigma &= \iint_D (x^2 + y^2 - 1) d\sigma - \iint_{D_1} (x^2 + y^2 - 1) d\sigma \\
\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma &= \iint_{D_1} (1 - x^2 - y^2) d\sigma + \iint_{D_2} (x^2 + y^2 - 1) d\sigma \\
&= \iint_{D_1} (1 - x^2 - y^2) d\sigma + \iint_D (x^2 + y^2 - 1) d\sigma - \iint_{D_1} (x^2 + y^2 - 1) d\sigma
\end{aligned}$$

$$= 2 \iint_{D_1} (1-x^2-y^2) d\sigma + \iint_D (x^2+y^2-1) d\sigma$$

由极坐标 $\iint_{D_1} (1-x^2-y^2) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (1-r^2) r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) d\theta = \frac{\pi}{8}.$

而 $\iint_D (x^2+y^2-1) d\sigma = \int_0^1 dy \int_0^1 (x^2+y^2-1) dx = \int_0^1 [\frac{x^3}{3} + (y^2-1)x]_0^1 dy$

$$= \int_0^1 [\frac{1}{3} + y^2 - 1] dy = \int_0^1 (y^2 - \frac{2}{3}) dy = [\frac{y^3}{3} - \frac{2}{3}y]_0^1 = -\frac{1}{3}$$

所以 $\iint_D |x^2+y^2-1| d\sigma = 2 \times \frac{\pi}{8} - \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.$

(22) 【详解】

方法 1: 记 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B=(\beta_1, \beta_2, \beta_3).$ 由于 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 故

$r(A) < 3$, (若 $r(A) = 3$, 则任何三维向量都可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出), 从而

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{加到第1行}]{\text{把第2,3行}} \begin{vmatrix} 2+a & 2+a & 2+a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{公因子}(2+a)]{\text{提取第1行的}} (2+a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{3行}-1\text{行}]{\text{2行}-1\text{行}} (2+a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{按第3列展开}} (2+a) \cdot (-1)^{1+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 0 & a-1 \\ a-1 & 0 \end{vmatrix} = -(2+a)(a-1)^2 = 0$$

(其中 $(-1)^{1+3}$ 指数中的 1 和 3 分别是 1 所在的行数和列数)

从而得 $a=1$ 或 $a=-2$.

当 $a=1$ 时, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = [1, 1, 1]^T$, 则 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 + 0 \cdot \beta_2 + 0 \cdot \beta_3$,

故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出, 但 $\beta_2 = [-2, 1, 4]^T$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出(因

为方程组 $\beta_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 即 $\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = -2 \\ k_1 + k_2 + k_3 = 1 \\ k_1 + k_2 + k_3 = 4 \end{cases}$ 无解), 故 $a=1$ 符合题意.

当 $a = -2$ 时, 由于

$$[B:A] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & \vdots & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{2\text{行}-1\text{行}, \\ 3\text{行}+1\text{行}\times 2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & \vdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因 $r(B) = 2 \neq r(B:\alpha_2) = 3$, 系数矩阵的秩和增广矩阵的秩不相等, 故方程组

$BX = \alpha_2$ 无解, 故 α_2 不能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出, 这和题设矛盾, 故 $a = -2$ 不合题意.

因此 $a = 1$.

方法 2: 对矩阵 $\bar{A} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3 : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 作初等行变换, 有

$$\bar{A} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3 : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & a \\ 1 & a & a & \vdots & 1 & a & 1 \\ a & 4 & a & \vdots & a & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{2\text{行}-1\text{行}, \\ 3\text{行}-1\text{行}\times a}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & a \\ 0 & a+2 & a+2 & \vdots & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 4+2a & 3a & \vdots & 0 & 1-a & 1-a \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3\text{行}-2\text{行}\times 2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & a \\ 0 & a+2 & a+2 & \vdots & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-4 & \vdots & 0 & 3(1-a) & 1-a \end{bmatrix},$$

$$\text{当 } a = -2 \text{ 时, } \bar{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & \vdots & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \text{ 不存在非零常数 } k_1, k_2, k_3,$$

$$\text{使得 } \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}, \alpha_2 \text{ 不能由 } \beta_1, \beta_2, \beta_3 \text{ 线性表示, 因此 } a \neq -2;$$

当 $a = 4$ 时,

$$\bar{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 6 & \vdots & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -9 & -3 \end{bmatrix},$$

α_3 不能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 不存在非零常数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ 因此 } a \neq 4.$$

而当 $a \neq -2$ 且 $a \neq 4$ 时, 秩 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 3$, 此时向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由向量组

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示. 又

$$\begin{aligned}\bar{B} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2 \\ 1 & a & 1 & \vdots & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & \vdots & a & 4 & a \end{bmatrix} \\ \begin{array}{l} 2\text{行}-1\text{行}, \\ 3\text{行}-1\text{行} \times a \end{array} &\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0 & a+2 & a+2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & \vdots & 0 & 4+2a & 3a \end{bmatrix} \\ \underline{3\text{行}+2\text{行}} &\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0 & a+2 & a+2 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & \vdots & 0 & 6+3a & 4a+2 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

由题设向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则方程组

$(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)x = \beta_1$ 或 $(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)x = \beta_2$ 或 $(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)x = \beta_3$ 无解, 故系数矩阵的秩

$\neq$ 增广矩阵的秩, 故 $r(\bar{B}) \neq r(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)$.

又当 $a \neq -2$ 且 $a \neq 4$ 时, $r(\bar{B}) = 3$, 则必有 $a-1=0$ 或 $2-a-a^2=0$, 即 $a=1$

或 $a=-2$.

综上所述, 满足题设条件的 a 只能是: $a=1$.

方法 3: 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 对矩阵 $(A; B)$ 作初等行变换, 得

$$\begin{aligned}(A; B) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2 \\ 1 & a & 1 & \vdots & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & \vdots & a & 4 & a \end{bmatrix} \\ \begin{array}{l} 2\text{行}-1\text{行}, \\ 3\text{行}-1\text{行} \times a \end{array} &\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0 & a+2 & a+2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & \vdots & 0 & 4+2a & 3a \end{bmatrix} \\ \underline{3\text{行}+2\text{行}} &\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0 & a+2 & a+2 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & \vdots & 0 & 6+3a & 4a+2 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

由于 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 故 $r(A) < 3$, (若 $r(A) = 3$, 则任何三

维向量都可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出), 从而

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{加到第1行}]{\text{把第2,3行}} \begin{vmatrix} 2+a & 2+a & 2+a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{公因子}(2+a)]{\text{提取第1行的}} (2+a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow[\text{3行}-1行]{\text{2行}-1行} (2+a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第3列展开}} (2+a) \cdot (-1)^{1+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 0 & a-1 \\ a-1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -(2+a)(a-1)^2 = 0
\end{aligned}$$

从而得 $a=1$ 或 $a=-2$.

当 $a=1$ 时,

$$(A : B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 : 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 : 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 : 0 & 9 & 6 \end{pmatrix},$$

则 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 + 0 \cdot \beta_2 + 0 \cdot \beta_3$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出, 但由于

$r(A) = 1 \neq r(A : \beta_2) = 2$, 系数矩阵的秩和增广矩阵的秩不相等, 方程组 $Ax = \beta_2$ 无解,

$\beta_2 = [-2, 1, 4]^T$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出. 或由于 $r(A) = 1 \neq r(A : \beta_3) = 2$, 系数矩阵

的秩和增广矩阵的秩不相等, 方程组 $Ax = \beta_3$ 无解, β_3 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 即

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 故 $a=1$ 符合题意.

当 $a=-2$ 时,

$$(A : B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 : 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 : 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 : 0 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

因 $r(A) = 2 \neq r(A : \beta_3) = 3$, 系数矩阵的秩和增广矩阵的秩不相等, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能

由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 但 $r(B) = 2 \neq r(B : \alpha_2) = 3$ (或 $r(B : \alpha_3) = 3$), 系数矩阵的秩

和增广矩阵的秩不相等, 即 $BX = \alpha_2$ (或 $BX = \alpha_3$) 无解, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$

线性表出, 与题设矛盾, 故 $a=-2$ 不合题意.

故 $a=1$.

(23) 【详解】 由 $AB=0$ 知, B 的每一列均为 $Ax=0$ 的解, 且 $r(A)+r(B) \leq 3$. (3 是 A 的列数或 B 的行数)

(1) 若 $k \neq 9$, β_1, β_3 不成比例, β_1, β_2 成比例, 则 $r(B) = 2$, 方程组 $Ax = 0$ 的解向量中至少有两个线性无关的解向量, 故它的基础解系中解向量的个数 ≥ 2 , 又基础解系中解向量的个数 = 未知数的个数 $- r(A) = 3 - r(A)$, 于是 $r(A) \leq 1$.

又矩阵 A 的第一行元素 (a, b, c) 不全为零, 显然 $r(A) \geq 1$, 故 $r(A) = 1$. 可见此时 $Ax = 0$ 的基础解系由 $3 - r(A) = 2$ 个线性无关解向量组成, β_1, β_3 是方程组的解且线性无关, 可作为其基础解系, 故 $Ax = 0$ 的通解为:

$$x = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ k \end{pmatrix}, k_1, k_2 \text{ 为任意常数.}$$

(2) 若 $k = 9$, 则 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 均成比例, 故 $r(B) = 1$, 从而 $1 \leq r(A) \leq 2$. 故 $r(A) = 1$ 或 $r(A) = 2$.

①若 $r(A) = 2$, 则方程组的基础解系由一个线性无关的解组成, β_1 是方程组 $Ax = 0$ 的基础

解系, 则 $Ax = 0$ 的通解为: $x = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, k_1 \text{ 为任意常数.}$

②若 $r(A) = 1$, 则 A 的三个行向量成比例, 因第 1 行元素 (a, b, c) 不全为零, 不妨设 $a \neq 0$,

则 $Ax = 0$ 的同解方程组为: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, 系数矩阵的秩为 1, 故基础解系由 $3 - 1 = 2$

个线性无关解向量组成, 选 x_2, x_3 为自由未知量, 分别取 $x_2 = 1, x_3 = 0$ 或 $x_2 = 0, x_3 = 1$, 方

程组的基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则其通解为 $x = k_1 \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \text{ 为任意}$

常数.