

2003 年考研数学 (三) 真题答案

1. 【分析】 当 $x \neq 0$ 可直接按公式求导, 当 $x=0$ 时要求用定义求导.

【详解】 当 $\lambda > 1$ 时, 有

$$f'(x) = \begin{cases} \lambda x^{\lambda-1} \cos \frac{1}{x} + x^{\lambda-2} \sin \frac{1}{x}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0, \end{cases}$$

显然当 $\lambda > 2$ 时, 有 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 = f'(0)$, 即其导函数在 $x=0$ 处连续.

2. 【分析】 曲线在切点的斜率为 0, 即 $y' = 0$, 由此可确定切点的坐标应满足的条件,

再根据在切点处纵坐标为零, 即可找到 b^2 与 a 的关系.

【详解】 由题设, 在切点处有

$$y' = 3x^2 - 3a^2 = 0, \text{ 有 } x_0^2 = a^2.$$

又在此点 y 坐标为 0, 于是有

$$0 = x_0^3 - 3a^2 x_0 + b = 0,$$

故 $b^2 = x_0^2 (3a^2 - x_0^2)^2 = a^2 \cdot 4a^4 = 4a^6$.

3. 【分析】 本题积分区域为全平面, 但只有当 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y - x \leq 1$ 时, 被积函数才

不为零, 因此实际上只需在满足此不等式的区域内积分即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 } I &= \iint_D f(x)g(y-x)dx dy = \iint_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y-x \leq 1} a^2 dx dy \\ &= a^2 \int_0^1 dx \int_x^{x+1} dy = a^2 \int_0^1 [(x+1) - x] dx = a^2. \end{aligned}$$

4. 【分析】 这里 $\alpha\alpha^T$ 为 n 阶矩阵, 而 $\alpha^T = \alpha 2a^2$ 为数, 直接通过 $AB = E$ 进行计算

并注意利用乘法的结合律即可.

【详解】 由题设, 有

$$\begin{aligned} AB &= (E - \alpha\alpha^T)(E + \frac{1}{a}\alpha\alpha^T) \\ &= E - \alpha\alpha^T + \frac{1}{a}\alpha\alpha^T - \frac{1}{a}\alpha\alpha^T \cdot \alpha\alpha^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E - \alpha\alpha^T + \frac{1}{a}\alpha\alpha^T - \frac{1}{a}\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T \\
&= E - \alpha\alpha^T + \frac{1}{a}\alpha\alpha^T - 2a\alpha\alpha^T \\
&= E + (-1 - 2a + \frac{1}{a})\alpha\alpha^T = E,
\end{aligned}$$

于是有 $-1 - 2a + \frac{1}{a} = 0$, 即 $2a^2 + a - 1 = 0$, 解得 $a = \frac{1}{2}, a = -1$. 由于 $A < 0$, 故 $a = -1$.

5.. 【分析】 利用相关系数的计算公式即可.

【详解】 因为

$$\begin{aligned}
\text{cov}(Y, Z) &= \text{cov}(Y, X - 0.4) = E[(Y(X - 0.4))] - E(Y)E(X - 0.4) \\
&= E(XY) - 0.4E(Y) - E(Y)E(X) + 0.4E(Y) \\
&= E(XY) - E(X)E(Y) = \text{cov}(X, Y),
\end{aligned}$$

且 $DZ = DX$.

$$\text{于是有 } \text{cov}(Y, Z) = \frac{\text{cov}(Y, Z)}{\sqrt{DY}\sqrt{DZ}} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \rho_{XY} = 0.9.$$

【评注】 注意以下运算公式: $D(X + a) = DX$, $\text{cov}(X, Y + a) = \text{cov}(X, Y)$.

6.. 【分析】 本题考查大数定律: 一组相互独立且具有有限期望与方差的随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 当方差一致有界时, 其算术平均值依概率收敛于其数学期望的算术平均值:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i \quad (n \rightarrow \infty).$$

【详解】 这里 $X_1^2, X_2^2, \dots, X_n^2$ 满足大数定律的条件, 且

$$EX_i^2 = DX_i + (EX_i)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, \text{ 因此根据大数定律有}$$

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \text{ 依概率收敛于 } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i^2 = \frac{1}{2}.$$

二、选择题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内)

7. 【分析】 由题设, 可推出 $f(0)=0$, 再利用在点 $x=0$ 处的导数定义进行讨论即可.

【详解】 显然 $x=0$ 为 $g(x)$ 的间断点, 且由 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数知, $f(0)=0$.

于是有 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$ 存在, 故 $x=0$ 为可去间断点.

【评注 1】 本题也可用反例排除, 例如 $f(x)=x$, 则此时 $g(x)=\frac{x}{x}=\begin{cases} 1, x \neq 0, \\ 0, x = 0, \end{cases}$ 可排除

(A),(B),(C) 三项, 故应选(D).

【评注 2】 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} = A \Leftrightarrow f(x_0) = 0, f'(x_0) = A$.

8. 【分析】 可微必有偏导数存在, 再根据取极值的必要条件即可得结论.

【详解】 可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极小值, 根据取极值的必要条件知

$f'_y(x_0, y_0) = 0$, 即 $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数等于零, 故应选(A).

【评注 1】 本题考查了偏导数的定义, $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数即 $f'_y(x_0, y_0)$; 而 $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处的导数即 $f'_x(x_0, y_0)$.

【评注 2】 本题也可用排除法分析, 取 $f(x, y) = x^2 + y^2$, 在 $(0,0)$ 处可微且取得极小值, 并且有 $f(0, y) = y^2$, 可排除(B),(C),(D), 故正确选项为(A).

9. 【分析】 根据绝对收敛与条件收敛的关系以及收敛级数的运算性质即可找出答案.

【详解】 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 当然也有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 再根据

$p_n = \frac{a_n + |a_n|}{2}, q_n = \frac{a_n - |a_n|}{2}$ 及收敛级数的运算性质知, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛, 故应选(B).

10. 【分析】 A 的伴随矩阵的秩为 1, 说明 A 的秩为 2, 由此可确定 a, b 应满足的条件.

【详解】 根据 A 与其伴随矩阵 A^* 秩之间的关系知, 秩(A)=2, 故有

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (a+2b)(a-b)^2 = 0, \text{ 即有 } a+2b=0 \text{ 或 } a=b.$$

但当 $a=b$ 时, 显然秩(A) $\neq 2$, 故必有 $a \neq b$ 且 $a+2b=0$. 应选(C).

【评注】 n ($n \geq 2$) 阶矩阵 A 与其伴随矩阵 A^* 的秩之间有下列关系:

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n, \\ 1, & r(A) = n-1, \\ 0, & r(A) < n-1. \end{cases}$$

11. 【分析】 本题涉及到线性相关、线性无关概念的理解, 以及线性相关、线性无关的等价表现形式. 应注意是寻找不正确的命题.

【详解】 (A): 若对于任意一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 都有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \neq 0$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 必线性无关, 因为若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$, 矛盾. 可见 (A) 成立.

(B): 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则存在一组, 而不是对任意一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 都有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$. (B) 不成立.

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则此向量组的秩为 s ; 反过来, 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩为 s , 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 因此 (C) 成立.

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则其任一部分组线性无关, 当然其中任意两个向量线性无关, 可见 (D) 也成立.

综上所述, 应选 (B).

【评注】 原命题与其逆否命题是等价的. 例如, 原命题: 若存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$ 成立, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关. 其逆否命题为: 若对于任意一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 都有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \neq 0$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关. 在平时的学习过程中, 应经常注意这种原命题与其逆否命题的等价性.

12. 【分析】 按照相互独立与两两独立的定义进行验算即可, 注意应先检查两两独立, 若成立, 再检验是否相互独立.

【详解】 因为

$$P(A_1) = \frac{1}{2}, \quad P(A_2) = \frac{1}{2}, \quad P(A_3) = \frac{1}{2}, \quad P(A_4) = \frac{1}{4},$$

$$\text{且 } P(A_1A_2) = \frac{1}{4}, \quad P(A_1A_3) = \frac{1}{4}, \quad P(A_2A_3) = \frac{1}{4}, \quad P(A_2A_4) = \frac{1}{4}, \quad P(A_1A_2A_3) = 0,$$

可见有

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2), \quad P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3), \quad P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3),$$

$$P(A_1 A_2 A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3), \quad P(A_2 A_4) \neq P(A_2)P(A_4).$$

故 A_1, A_2, A_3 两两独立但不相互独立; A_2, A_3, A_4 不两两独立更不相互独立, 应选(C).

【评注】 本题严格地说应假定硬币是均匀的, 否则结论不一定成立.

13.. **【分析】** 只需求出极限 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, 然后定义 $f(1)$ 为此极限值即可.

【详解】 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{\pi x} + \frac{1}{\sin \pi x} - \frac{1}{\pi(1-x)} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi(1-x) - \sin \pi x}{(1-x) \sin \pi x} \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\pi - \pi \cos \pi x}{-\sin \pi x + (1-x) \pi \cos \pi x} \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi^2 \sin \pi x}{-\pi \cos \pi x - \pi \cos \pi x - (1-x) \pi^2 \sin \pi x} \\ &= \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1)$ 上连续, 因此定义

$$f(1) = \frac{1}{\pi},$$

使 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上连续.

【评注】 本题实质上是一求极限问题, 但以这种形式表现出来, 还考查了连续的概念.

在计算过程中, 也可先作变量代换 $y=1-x$, 转化为求 $y \rightarrow 0^+$ 的极限, 可以适当简化.

14.. **【分析】** 本题是典型的复合函数求偏导问题: $g = f(u, v)$,

$u = xy, v = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, 直接利用复合函数求偏导公式即可, 注意利用 $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$.

【详解】
$$\frac{\partial g}{\partial x} = y \frac{\partial f}{\partial u} + x \frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = x \frac{\partial f}{\partial u} - y \frac{\partial f}{\partial v}.$$

故
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \frac{\partial f}{\partial v}.$$

所以
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \\ &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

【评注】 本题考查半抽象复合函数求二阶偏导.

15.. 【分析】 从被积函数与积分区域可以看出, 应该利用极坐标进行计算.

【详解】 作极坐标变换: $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 有

$$\begin{aligned} I &= e^\pi \iint_D e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2 + y^2) dx dy \\ &= e^\pi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\pi}} r e^{-r^2} \sin r^2 dr. \end{aligned}$$

令 $t = r^2$, 则

$$I = \pi e^\pi \int_0^\pi e^{-t} \sin t dt.$$

记 $A = \int_0^\pi e^{-t} \sin t dt$, 则

$$\begin{aligned} A &= - \int_0^\pi e^{-t} \sin t de^{-t} \\ &= - [e^{-t} \sin t]_0^\pi - \int_0^\pi e^{-t} \cos t dt \\ &= - \int_0^\pi \cos t de^{-t} \\ &= - [e^{-t} \cos t]_0^\pi + \int_0^\pi e^{-t} \sin t dt \\ &= e^{-\pi} + 1 - A. \end{aligned}$$

因此
$$A = \frac{1}{2}(1 + e^{-\pi}),$$

$$I = \frac{\pi e^\pi}{2}(1 + e^{-\pi}) = \frac{\pi}{2}(1 + e^\pi).$$

【评注】 本题属常规题型，明显地应该选用极坐标进行计算，在将二重积分化为定积分后，再通过换元与分步积分（均为最基础的要求），即可得出结果，综合考查了二重积分、换元积分与分步积分等多个基础知识点.

16. 【分析】 先通过逐项求导后求和，再积分即可得和函数，注意当 $x=0$ 时和为 1. 求出和函数后，再按通常方法求极值.

【详解】

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n-1} = -\frac{x}{1+x^2}.$$

上式两边从 0 到 x 积分，得

$$f(x) - f(0) = -\int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

由 $f(0)=1$, 得

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2} \ln(1+x^2), (|x| < 1).$$

令 $f'(x) = 0$, 求得唯一驻点 $x=0$. 由于

$$f''(x) = -\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},$$

$$f''(0) = -1 < 0,$$

可见 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值，且极大值为

$$f(0)=1.$$

【评注】 求和函数一般都是先通过逐项求导、逐项积分等转化为可直接求和的几何级数情形，然后再通过逐项积分、逐项求导等逆运算最终确定和函数.

17. 【分析】 $F(x)$ 所满足的微分方程自然应含有其导函数，提示应先对 $F(x)$ 求导，并将其余部分转化为用 $F(x)$ 表示，导出相应的微分方程，然后再求解相应的微分方程.

【详解】 (1) 由

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= g^2(x) + f^2(x) \\ &= [f(x) + g(x)]^2 - 2f(x)g(x) \\ &= (2e^x)^2 - 2F(x), \end{aligned}$$

可见 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程为

$$F'(x) + 2F(x) = 4e^{2x}.$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad F(x) &= e^{-\int 2dx} \left[\int 4e^{2x} \cdot e^{\int 2dx} dx + C \right] \\
 &= e^{-2x} \left[\int 4e^{4x} dx + C \right] \\
 &= e^{2x} + Ce^{-2x}.
 \end{aligned}$$

将 $F(0)=f(0)g(0)=0$ 代入上式, 得

$$C=-1.$$

于是

$$F(x) = e^{2x} - e^{-2x}.$$

【评注】 本题没有直接告知微分方程, 要求先通过求导以及恒等变形引出微分方程的形式, 从题型来说比较新颖, 但具体到微分方程的求解则并不复杂, 仍然是基本要求的范围.

18. **【分析】** 根据罗尔定理, 只需再证明存在一点 $c \in [0, 3]$, 使得 $f(c) = 1 = f(3)$,

然后在 $[c, 3]$ 上应用罗尔定理即可. 条件 $f(0)+f(1)+f(2)=3$ 等价于 $\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3} = 1$, 问题转化为 1 介于 $f(x)$ 的最值之间, 最终用介值定理可以达到目的.

【详解】 因为 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 且在 $[0, 2]$ 上必有最大值 M 和最小值 m , 于是

$$m \leq f(0) \leq M,$$

$$m \leq f(1) \leq M,$$

$$m \leq f(2) \leq M.$$

故

$$m \leq \frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3} \leq M.$$

由介值定理知, 至少存在一点 $c \in [0, 2]$, 使

$$f(c) = \frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3} = 1.$$

因为 $f(c)=1=f(3)$, 且 $f(x)$ 在 $[c, 3]$ 上连续, 在 $(c, 3)$ 内可导, 所以由罗尔定理知, 必存在 $\xi \in (c, 3) \subset (0, 3)$, 使 $f'(\xi) = 0$.

【评注】 介值定理、微分中值定理与积分中值定理都是常考知识点, 且一般是两两结合起来考. 本题是典型的结合介值定理与微分中值定理的情形.

19. **【分析】** 方程的个数与未知量的个数相同, 问题转化为系数矩阵行列式是否为零,

而系数行列式的计算具有明显的特征：所有列对应元素相加后相等. 可先将所有列对应元素相加，然后提出公因式，再将第一行的（-1）倍加到其余各行，即可计算出行列式的值.

【详解】 方程组的系数行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 + b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 + b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n + b \end{vmatrix}$$

$$= b^{n-1} (b + \sum_{i=1}^n a_i).$$

(1) 当 $b \neq 0$ 时且 $b + \sum_{i=1}^n a_i \neq 0$ 时，秩(A)=n，方程组仅有零解.

(2) 当 $b=0$ 时，原方程组的同解方程组为

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0.$$

由 $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$ 可知， $a_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 不全为零. 不妨设 $a_1 \neq 0$ ，得原方程组的一个基础

解系为

$$\alpha_1 = (-\frac{a_2}{a_1}, 1, 0, \cdots, 0)^T, \quad \alpha_2 = (-\frac{a_3}{a_1}, 0, 1, \cdots, 0)^T, \quad \cdots, \quad \alpha_n = (-\frac{a_n}{a_1}, 0, 0, \cdots, 1)^T.$$

当 $b = -\sum_{i=1}^n a_i$ 时，有 $b \neq 0$ ，原方程组的系数矩阵可化为

$$\begin{bmatrix} a_1 - \sum_{i=1}^n a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 - \sum_{i=1}^n a_i & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 - \sum_{i=1}^n a_i & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n - \sum_{i=1}^n a_i \end{bmatrix}$$

（将第 1 行的 -1 倍加到其余各行，再从第 2 行到第 n 行同乘以 $-\frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i}$ 倍）

$$\rightarrow \begin{bmatrix} a_1 - \sum_{i=1}^n a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

(将第 n 行 $-a_n$ 倍到第 2 行的 $-a_2$ 倍加到第 1 行, 再将第 1 行移到最后一行)

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

由此得原方程组的同解方程组为

$$x_2 = x_1, \quad x_3 = x_1, \quad \cdots, x_n = x_1.$$

原方程组的一个基础解系为

$$\alpha = (1, 1, \cdots, 1)^T.$$

【评注】 本题的难点在 $b = -\sum_{i=1}^n a_i$ 时的讨论, 事实上也可这样分析: 此时系数矩阵的

秩为 $n-1$ (存在 $n-1$ 阶子式不为零), 且显然 $\alpha = (1, 1, \cdots, 1)^T$ 为方程组的一个非零解, 即可作为基础解系.

20. **【分析】** 特征值之和为 A 的主对角线上元素之和, 特征值之积为 A 的行列式, 由此可求出 a, b 的值; 进一步求出 A 的特征值和特征向量, 并将相同特征值的特征向量正交化 (若有必要), 然后将特征向量单位化并以此为列所构造的矩阵即为所求的正交矩阵.

【详解】 (1) 二次型 f 的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

设 A 的特征值为 $\lambda_i (i=1, 2, 3)$. 由题设, 有

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a + 2 + (-2) = 1,$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4a - 2b^2 = -12.$$

解得 $a=1, b=-2$.

(2) 由矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 3),$$

得 A 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -3$.

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, 解齐次线性方程组 $(2E - A)x = 0$, 得其基础解系

$$\xi_1 = (2, 0, 1)^T, \quad \xi_2 = (0, 1, 0)^T.$$

对于 $\lambda_3 = -3$, 解齐次线性方程组 $(-3E - A)x = 0$, 得基础解系

$$\xi_3 = (1, 0, -2)^T.$$

由于 ξ_1, ξ_2, ξ_3 已是正交向量组, 为了得到规范正交向量组, 只需将 ξ_1, ξ_2, ξ_3 单位化, 由此得

$$\eta_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^T, \quad \eta_2 = (0, 1, 0)^T, \quad \eta_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^T.$$

令矩阵

$$Q = [\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix},$$

则 Q 为正交矩阵. 在正交变换 $X=QY$ 下, 有

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

且二次型的标准形为

$$f = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2.$$

【评注】 本题求 a, b , 也可先计算特征多项式, 再利用根与系数的关系确定:
二次型 f 的矩阵 A 对应特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -b \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -b & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)[\lambda^2 - (a - 2)\lambda - (2a + b^2)].$$

设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 则 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 + \lambda_3 = a - 2, \lambda_2 \lambda_3 = -(2a + b^2)$. 由题设得

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + (a - 2) = 1,$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -2(2a + b^2) = -12.$$

解得 $a=1, b=2$.

21. **【分析】** 先求出分布函数 $F(x)$ 的具体形式, 从而可确定 $Y=F(X)$, 然后按定义求 Y 的分布函数即可. 注意应先确定 $Y=F(X)$ 的值域范围 ($0 \leq F(X) \leq 1$), 再对 y 分段讨论.

【详解】 易见, 当 $x < 1$ 时, $F(x)=0$; 当 $x > 8$ 时, $F(x)=1$.

对于 $x \in [1, 8]$, 有

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} dt = \sqrt[3]{x} - 1.$$

设 $G(y)$ 是随机变量 $Y=F(X)$ 的分布函数. 显然, 当 $y < 0$ 时, $G(y)=0$; 当 $y \geq 1$ 时, $G(y)=1$.

对于 $y \in [0, 1)$, 有

$$\begin{aligned} G(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{F(X) \leq y\} \\ &= P\{\sqrt[3]{X} - 1 \leq y\} = P\{X \leq (y+1)^3\} \\ &= F[(y+1)^3] = y. \end{aligned}$$

于是, $Y=F(X)$ 的分布函数为

$$G(y) = \begin{cases} 0, & \text{若 } y < 0, \\ y, & \text{若 } 0 \leq y < 1, \\ 1, & \text{若 } y \geq 1. \end{cases}$$

【评注】 事实上, 本题 X 为任意连续型随机变量均可, 此时 $Y=F(X)$ 仍服从均匀分布: 当 $y < 0$ 时, $G(y)=0$;

当 $y \geq 1$ 时, $G(y)=1$;

当 $0 \leq y < 1$ 时, $G(y) = P\{Y \leq y\} = P\{F(X) \leq y\}$

$$= P\{X \leq F^{-1}(y)\}$$

$$= F(F^{-1}(y)) = y.$$

22.. **【分析】** 求二维随机变量函数的分布，一般用分布函数法转化为求相应的概率. 注意 X 只有两个可能的取值，求概率时可用全概率公式进行计算.

【详解】 设 $F(y)$ 是 Y 的分布函数，则由全概率公式，知 $U=X+Y$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} G(u) &= P\{X + Y \leq u\} \\ &= 0.3P\{X + Y \leq u | X = 1\} + 0.7P\{X + Y \leq u | X = 2\} \\ &= 0.3P\{Y \leq u - 1 | X = 1\} + 0.7P\{Y \leq u - 2 | X = 2\}. \end{aligned}$$

由于 X 和 Y 独立，可见

$$\begin{aligned} G(u) &= 0.3P\{Y \leq u - 1\} + 0.7P\{Y \leq u - 2\} \\ &= 0.3F(u - 1) + 0.7F(u - 2). \end{aligned}$$

由此,得 U 的概率密度

$$\begin{aligned} g(u) &= G'(u) = 0.3F'(u - 1) + 0.7F'(u - 2) \\ &= 0.3f(u - 1) + 0.7f(u - 2). \end{aligned}$$

【评注】 本题属新题型，求两个随机变量和的分布，其中一个是连续型一个是离散型，要求用全概率公式进行计算，类似问题以前从未出现过，具有一定的难度和综合性.