

2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题

(1) 【答案】 -2

【详解】如果分段函数 $f(x)$ 连续, 则 $f(x)$ 在 0 点处的左右极限相等, 从而确定 a 的值.

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $1 - e^{\tan x} \sim -\tan x \sim -x$; $\arcsin \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}$, 所以有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{\tan x}}{\arcsin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\tan x}{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{\frac{x}{2}} = -2;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} a e^{2x} = a = f(0)$$

如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 必有 $f(0^+) = f(0^-) = f(0)$, 即 $a = -2$.

(2) 【答案】 1

【详解】面积 $S = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = -\int_0^{+\infty} x d e^{-x} = -\left[x e^{-x} - \int e^{-x} dx \right]_0^{+\infty}$

$$= -\left[x e^{-x} - e^{-x} \right]_0^{+\infty} = -\lim_{b \rightarrow +\infty} \left[x e^{-x} - e^{-x} \right]_0^b = -\lim_{b \rightarrow +\infty} \left[b e^{-b} - e^{-b} - 1 \right] = 1$$

其中 $\lim_{b \rightarrow +\infty} b e^{-b} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b}{e^b} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^b} = 0$.

(3) 【答案】 $y = \sqrt{x+1}$

【详解】方法 1: 这是属于缺 x 的 $y'' = f(y, y')$ 类型. 命 $y' = p, y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$.

原方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 化为 $yp \frac{dp}{dy} + p^2 = 0$, 得

$$p = 0 \text{ 或 } y \frac{dp}{dy} + p = 0$$

$p = 0$, 即 $\frac{dy}{dx} = 0$, 不满足初始条件 $y' \Big|_{x=0} = \frac{1}{2}$, 弃之; 所以 $p \neq 0$

所以, $y \frac{dp}{dy} + p = 0$, 分离变量得 $\frac{dy}{y} = -\frac{dp}{p}$, 解之得 $p = \frac{C_1}{y}$. 即 $\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{y}$.

由初始条件 $y \Big|_{x=0} = 1, y' \Big|_{x=0} = \frac{1}{2}$, 可将 C_1 先定出来: $\frac{1}{2} = \frac{C_1}{1}, C_1 = \frac{1}{2}$. 于是得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

解之得, $y^2 = x + C_2, y = \pm \sqrt{x + C_2}$. 以 $y \Big|_{x=0} = 1$ 代入, 得 $1 = \pm \sqrt{C_2}$, 所以应取“+”号

且 $C_2 = 1$. 于是特解是 $y = \sqrt{x+1}$.

方法2: 将 $yy'' + y'^2 = 0$ 改写为 $(yy')' = 0$, 从而得 $yy' = C_1$. 以初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}$

代入, 有 $1 \times \frac{1}{2} = C_1$, 所以得 $yy' = \frac{1}{2}$. 即 $2yy' = 1$, 改写为 $(y^2)' = 1$. 解得

$y = x + C_2, y = \pm \sqrt{x + C_2}$. 再以初值代入, $1 = \pm \sqrt{C_2}$ 所以应取“+”且 $C_2 = 1$. 于是

特解 $y = \sqrt{x+1}$.

(4) 【答案】 $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

【详解】利用定积分的概念将被积函数化为定积分求极限.

$$\text{因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n} i} \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i\pi}{n}\right) \Delta x_i$$

其中 $f(x) = \sqrt{1 + \cos x}, \Delta x_i = \frac{\pi}{n}, (i = 1, 2, \dots, n)$, 所以根据定积分的定义, 有

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos x} dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi \cos \frac{x}{2} dx = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \end{aligned}$$

(5) 【答案】 4

【详解】记 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, 则

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda - 2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \quad (\text{对应元素相减})$$

两边取行列式,

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda - 2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{2\text{行}+3\text{行}} \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 2 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{把第2行的公因子}\lambda\text{提出来}} \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{1\text{行}-2\text{行}\times 2} \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第1行展开}} \lambda \cdot \lambda \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

(其中 $(-1)^{1+1}$ 指数中的 1 和 1 分别是 λ 所在的行数和列数)

$$= \lambda^2(\lambda - 2 - 2) = \lambda^2(\lambda - 4)$$

令 $|\lambda E - A| = 0$, 解得 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 4$, 故 $\lambda = 4$ 是矩阵的非零特征值. (另一个特征值是 $\lambda = 0$ (二重))

二、选择题

(1) 【答案】(D)

【详解】在可导条件下, $\Delta y = \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_0} \Delta x + o(\Delta x)$, 当 $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_0} \neq 0$ 时 $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_0} \cdot \Delta x$ 称为 Δy 的线性主部.

而 $\frac{dy}{dx} \cdot \Delta x = f'(x^2) 2x \Delta x$, 以 $x = -1, \Delta x = -0.1$ 代入得 $\frac{dy}{dx} \cdot \Delta x = f'(1) \times 0.2$, 由题设它等于 0.1, 于是 $f'(1) = 0.5$, 应选(D).

(2) 【答案】(D)

【详解】对与(D), 令 $F(x) = \int_0^x t[f(t) + f(-t)]dt$, 则 $F(-x) = \int_0^{-x} t[f(t) + f(-t)]dt$, 令 $t = -u$, 则 $dt = -du$, 所以

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^{-x} t[f(t) + f(-t)]dt = \int_0^x (-u)[f(-u) + f(u)](-du) \\ &= \int_0^x u[f(-u) + f(u)]du = F(x), \end{aligned}$$

所以(D)为偶函数. 同理证得(A)、(C)为奇函数, 而(B)不确定, 如 $f(t)=1+t$. 故应选(D).

(3) 【答案】(C)

【详解】由 $y'' + py' + qy = e^{3x}$, 且 $y(0) = y'(0) = 0$, 可知 $y''(0) = 1$

方法 1: 因为当 $x^2 \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x^2) \sim x^2$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{y(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{y(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{y'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{y''(x)} = \frac{2}{1} = 2,$$

故选(C).

方法 2: 由于 $y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 1$. 将函数 $y(x)$ 按麦克劳林公式展开

$$y(x) = 0 + 0 + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \text{ 代入 } \frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}, \text{ 有}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{y(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}} = 2.$$

(4) 【详解】方法 1: 排斥法.

$$\text{令 } f(x) = \frac{1}{x} \sin x^2, \text{ 则 } f(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 有界, } f'(x) = -\frac{1}{x^2} \sin x^2 + 2 \cos x^2,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \text{ 但 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \text{ 不存在, 故(A)不成立;}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \text{ 但 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1 \neq 0, \text{ (C)和(D)不成立, 故选(B).}$$

方法 2: 证明(B)正确. 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在, 记 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = A$, 证明 $A = 0$.

用反证法, 若 $A > 0$, 则对于 $\varepsilon = \frac{A}{2} > 0$, 存在 $X > 0$, 使当 $x > X$ 时,

$$|f'(x) - A| < \varepsilon = \frac{A}{2}, \text{ 即 } \frac{A}{2} = A - \frac{A}{2} < f'(x) < A + \frac{A}{2} = \frac{3A}{2}$$

由此可知, $f'(x)$ 有界且大于 $\frac{A}{2}$. 在区间 $[x, X]$ 上应用拉格朗日中值定理, 有

$$f(x) = f(X) + f'(\xi)(x - X) > f(X) + \frac{A}{2}(x - X)$$

从而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 与题设 $f(x)$ 有界矛盾. 类似可证当 $A < 0$ 时亦有矛盾. 故

$$A = 0.$$

(5) 【答案】A

【详解】方法 1: 对任意常数 k , 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性无关. 用反证法, 若

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性相关, 因已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 故 $k\beta_1 + \beta_2$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出. 即存在常数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得 $k\beta_1 + \beta_2 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3$

又已知 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 即存在常数 l_1, l_2, l_3 , 使得 $\beta_1 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3$ 代入上式, 得

$$\begin{aligned} k\beta_1 + \beta_2 &= k(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3) + \beta_2 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 \\ \Rightarrow \beta_2 &= (\lambda_1 - kl_1)\alpha_1 + (\lambda_2 - kl_2)\alpha_2 + (\lambda_3 - kl_3)\alpha_3 \end{aligned}$$

与 β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出矛盾. 故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性无关, 选(A)

方法 2: 用排除法

B 选项: 取 $k = 0$, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2$ 线性相关不成立, 否则因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2$ 线性相关, 又 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 故 β_2 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出. 即存在常数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得 $\beta_2 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3$ 与已知矛盾, 排除(B).

C 选项: 取 $k = 0$, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1$ 线性无关不成立, 因为 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1$ 线性相关, 排除(C).

D 选项: $k \neq 0$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性相关不成立. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性相关, 因已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 故 $\beta_1 + k\beta_2$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出. 即存在常数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得 $\beta_1 + k\beta_2 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3$. 又已知 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 即存在常数 l_1, l_2, l_3 , 使得 $\beta_1 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3$ 代入上式, 得

$$\begin{aligned} \beta_1 + k\beta_2 &= (l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3) + k\beta_2 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 \\ \Rightarrow k\beta_2 &= (\lambda_1 - l_1)\alpha_1 + (\lambda_2 - l_2)\alpha_2 + (\lambda_3 - l_3)\alpha_3 \end{aligned}$$

因为 $k \neq 0$, 故 $\beta_2 = \frac{\lambda_1 - l_1}{k}\alpha_1 + \frac{\lambda_2 - l_2}{k}\alpha_2 + \frac{\lambda_3 - l_3}{k}\alpha_3$

与 β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出矛盾. 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性相关不成立, 排除(D).

故选(A).

三【详解】由极坐标到直角坐标的变换公式 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$, 化极坐标曲线 $r = 1 - \cos \theta$ 为直

角坐标的参数方程为

$$\begin{cases} x = (1 - \cos \theta) \cos \theta \\ y = (1 - \cos \theta) \sin \theta \end{cases}, \quad \text{即} \quad \begin{cases} x = \cos \theta - \cos^2 \theta \\ y = \sin \theta - \cos \theta \sin \theta \end{cases}$$

曲线上 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 的点对应的直角坐标为 $(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4})$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \bigg|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{\cos \theta + \sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{-\sin \theta + 2 \cos \theta \sin \theta} \bigg|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 1.$$

于是得切线的直角坐标方程为

$$y - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}) = x - (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}), \quad \text{即} \quad x - y - \frac{3}{4}\sqrt{3} + \frac{5}{4} = 0.$$

(这是由直线的点斜式得到的, 直线的点斜式方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$, 由导数的几何意义

知在 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时斜率为 1, 且该点的直角坐标为 $(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4})$),

法线方程为

$$y - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}) = -\frac{1}{1}(x - (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4})), \quad \text{即} \quad x + y - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} = 0.$$

(这是由直线的点斜式方程及在同一点切线斜率与法线斜率为负倒数的关系而得)

四【详解】当 $-1 \leq x < 0$ 时

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^x (2t + \frac{3}{2}t^2) dt = (t^2 + \frac{1}{2}t^3) \bigg|_{-1}^x = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}.$$

当 $0 \leq x < 1$ 时,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = (t^2 + \frac{1}{2}t^3) \bigg|_{-1}^0 + \int_0^x \frac{te^t}{(e^t + 1)^2} dt \\ &= -\frac{1}{2} - \int_0^x t d \frac{1}{(e^t + 1)} = -\frac{1}{2} - \frac{t}{e^t + 1} \bigg|_0^x + \int_0^x \frac{dt}{e^t + 1} = -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x + 1} + \int_0^x \frac{e^{-t} dt}{1 + e^{-t}} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x + 1} - \ln(1 + e^{-x}) \Big|_0^x = -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x + 1} + \ln \frac{e^x}{e^x + 1} + \ln 2$$

所以

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}, & \text{当 } -1 \leq x < 0 \\ \ln \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{x}{e^x + 1} + \ln 2 - \frac{1}{2}, & \text{当 } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

五【详解】因为 $\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{h} \ln \left(\frac{f(x+hx)}{f(x)} \right)}$,

又 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left(\frac{f(x+hx)}{f(x)} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\ln f(x+hx) - \ln f(x)), \quad x \neq 0$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\ln f(x+hx) - \ln f(x)}{hx} \right) \times x = (\ln f(x))' \times x = \frac{xf'(x)}{f(x)}$$

从而得到 $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+hx)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{xf'(x)}{f(x)}} \underline{\text{由题设}} e^{\frac{1}{x}}$

于是推得 $\frac{xf'(x)}{f(x)} = (\ln f(x))' x = \frac{1}{x}$, 即 $(\ln f(x))' = \frac{1}{x^2}$

解此微分方程, 得 $\ln f(x) = -\frac{1}{x} + C_1$, 改写成 $f(x) = Ce^{\frac{1}{x}}$

再由条件 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = C = 1$, 于是得 $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

六【详解】这是一阶线性微分方程 $y' - \frac{2}{x}y = -1$, 由通解公式(如果一个一阶线性方程为

$y' + p(x)y = q(x)$ 那么通解为 $y = e^{-\int p(x)dx} [\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C]$)有

$$y = e^{\int \frac{2}{x} dx} [-\int e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx + C] = x^2 [-\int \frac{1}{x^2} dx + C] = x^2 \left(\frac{1}{x} + C \right) = x + Cx^2, 1 \leq x \leq 2$$

由曲线 $y = x + Cx^2$ 与 $x=1, x=2$ 及 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转一周的旋转体的体积为

$$V = \pi \int_1^2 (x + Cx^2)^2 dx = \pi \left(\frac{31}{5}C^2 + \frac{15}{2}C + \frac{7}{3} \right)$$

(旋转体的体积公式: 设有连续曲线 $\Gamma: y = f(x) (a \leq x \leq b)$, $f(x) \geq 0$ 与直线 $x=a, x=b$ 及

x 轴围成平面图形. 该图形绕 x 轴旋转一周产生旋转体的体积为 $V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$

取 C 使 V 最小, 由求最值的方法知先求函数的驻点, 即 $\frac{dV}{dC} = 0$ 的点,

$$\frac{dV}{dC} = \pi \left(\frac{62}{5}C + \frac{15}{2} \right) = 0$$

解得 $C = -\frac{75}{124}$. 又 $V''(C) > 0$, 故 $C = -\frac{75}{124}$ 为 V 的惟一极小值点, 也是最小值点, 于是所求曲线为

$$y = x - \frac{75}{124}x^2.$$

七【详解】方法1: 建立坐标系如下图,

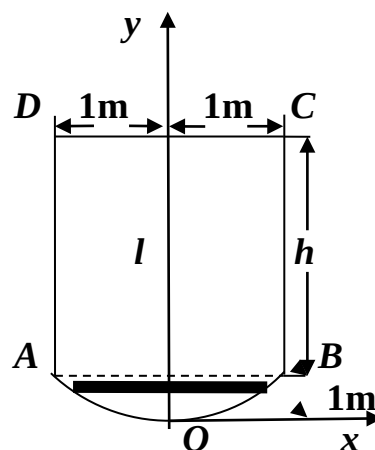
由于底部是二次抛物线我们设此抛物线为

$y = px^2 + q$, 由坐标轴的建立知此抛物线过

$(0,0), (1,1)$ 点, 把这两点代入抛物线的方程,

$$\text{得} \begin{cases} 0 = p \times 0^2 + q \\ 1 = p \times 1^2 + q \end{cases}, \text{ 所以 } q = 0, p = 1.$$

即底部的二次抛物线是 $y = x^2$, $-1 \leq x \leq 1$.



细横条为面积微元, 按所建立的坐标系及抛物线的方程, 得到面积微元 $dA = 2xdy$, 因此压力微元

$$dp = 2\rho gx(1+h-y)dy \quad (\text{这是由压力的公式得到的: 压力} = \text{压强} \times \text{面积})$$

平板 $ABCD$ 上所受的总压力为

$$P_1 = \int_1^{1+h} 2\rho gx(1+h-y)dy$$

其中以 $x=1$ 代入, 计算得 $P_1 = \rho gh^2$.

抛物板 AOB 上所受的总压力为

$$P_2 = \int_0^1 2\rho gx(1+h-y)dy,$$

其中由抛物线方程知 $x = \sqrt{y}$, 代入计算得 $P_2 = 4\rho g \left(\frac{1}{3}h + \frac{2}{15} \right)$,

$$\text{由题意 } P_1 : P_2 = 5 : 4, \text{ 即 } \frac{h^2}{4 \left(\frac{1}{3}h + \frac{2}{15} \right)} = \frac{5}{4}$$

解之得 $h = 2$ (米) ($h = -\frac{1}{3}$ 舍去), 即闸门矩形部分的高应为 $2m$.

八【详解】由 $0 < x_1 < 3$ 知 x_1 及 $(3-x_1)$ 均为正数, 故

$$0 < x_2 = \sqrt{x_1(3-x_1)} \leq \frac{1}{2}(x_1 + 3 - x_1) = \frac{3}{2}. \quad (ab \leq (\frac{a+b}{2})^2, a, b \text{ 为正数})$$

假设 $0 < x_k \leq \frac{3}{2}$, 则再一次用不等式 $ab \leq (\frac{a+b}{2})^2$, 得

$$x_{k+1} = \sqrt{x_k(3-x_k)} \leq \frac{1}{2}(x_k + 3 - x_k) = \frac{3}{2}.$$

由数学归纳法知, 对任意正整数 $n \geq 2$ 有 $0 < x_n \leq \frac{3}{2}$.

$$\text{另一方面, } x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n(3-x_n)} - x_n \leq \frac{x_n(3-x_n) - x_n^2}{\sqrt{x_n(3-x_n)} + x_n} = \frac{x_n(3-2x_n)}{\sqrt{x_n(3-x_n)} + x_n} \geq 0.$$

所以 $\{x_n\}$ 单调增加. 单调增加数列 $\{x_n\}$ 有上界, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 记为 a .

由 $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$ 两边取极限, 于是由极限的运算性质得

$$a = \sqrt{a(3-a)}, \text{ 即 } 2a^2 - 3a = 0,$$

解得 $a = \frac{3}{2}$ 或 $a = 0$, 但因 $x_1 > 0$ 且单调增, 故 $a \neq 0$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{3}{2}.$$

九【详解】左、右两个不等式分别考虑. 先证左边不等式,

方法 1: 由所证的形式想到用拉格朗日中值定理.

$$\frac{\ln b - \ln a}{b-a} = (\ln x)' \Big|_{x=\xi} = \frac{1}{\xi}, 0 < a < \xi < b.$$

而 $\frac{1}{\xi} > \frac{1}{b} > \frac{2a}{a^2+b^2}$ 中第二个不等式来自不等式 $a^2+b^2 > 2ab$ (当 $0 < a < b$ 时), 这样就

证明了要证明的左边.

方法 2: 用单调性证, 将 b 改写为 x 并移项, 命

$$\varphi(x) = \ln x - \ln a - \frac{2a(x-a)}{a^2+x^2}, \text{ 有 } \varphi(a) = 0.$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2a}{a^2+x^2} + \frac{4ax(x-a)}{(a^2+x^2)^2} = \frac{(x-a)^2}{x(a^2+x^2)} + \frac{4ax(x-a)}{(a^2+x^2)^2} > 0 \text{ (当 } 0 < a < x \text{),}$$

所以, 当 $x > a > 0$ 时 $\varphi(x)$ 单调递增. 所以 $\varphi(x) > \varphi(a) = 0$, 故 $\varphi(b) > 0$,

$$\text{即 } \varphi(b) = \ln b - \ln a - \frac{2a(b-a)}{a^2+b^2} > 0 \Rightarrow \frac{\ln b - \ln a}{b-a} > \frac{2a}{a^2+b^2}$$

再证右边不等式, 用单调性证, 将 b 改写为 x 并移项, 命

$$\psi(x) = \ln x - \ln a - \frac{1}{\sqrt{ax}}(x-a),$$

$$\text{有 } \psi(a) = 0, \text{ 及 } \psi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{a}{2x\sqrt{x}}\right) = -\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}} < 0,$$

所以当 $x > a > 0$ 时, $\psi(x) < 0$, 再以 $x = b$ 代入, 得

$$\ln b - \ln a < \frac{1}{\sqrt{ab}}(b-a), \text{ 即 } \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

右边证毕.

十【详解】从题目结论出发, 要证存在唯一的一组 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)}{h^2} = 0$$

由极限的四则运算法则知, 分子极限应为 0, 即

$$\lim_{h \rightarrow 0} [\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h)] = f(0)$$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 于是上式变形为 $f(0)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = f(0)$. 由 $f(0) \neq 0$, 知

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1. \quad (1)$$

由洛必达法则,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_1 f'(h) + 2\lambda_2 f'(2h) + 3\lambda_3 f'(3h)}{2h} \end{aligned} \quad (2)$$

由极限的四则运算法则知分子的极限应是 0, 即

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\lambda_1 f'(h) + 2\lambda_2 f'(2h) + 3\lambda_3 f'(3h)) = 0$$

由于 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续, 于是上式变形为 $(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3) f'(0) = 0$, 由 $f'(0) \neq 0$, 知

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \quad (3)$$

对(2)再用洛必达法则, 和 $f''(x)$ 在 $x=0$ 连续

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_1 f''(h) + 4\lambda_2 f''(2h) + 9\lambda_3 f''(3h)}{2} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3) f''(0)$$

由 $f''(0) \neq 0$, 故应有

$$\lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 \quad (4)$$

将(1)、(3)、(4)联立解之, 由于系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

由克莱姆法则知, 存在唯一的一组解满足题设要求, 证毕.

十一【详解】(1) 由题设条件 $2A^{-1}B = B - 4E$, 两边左乘 A , 得 $2AA^{-1}B = AB - 4A$, 即 $2B = AB - 4A \Rightarrow AB - 2B = 4A$

所以 $(A - 2E)B = AB - 2B = 4A = 4A - 8E + 8E = 4(A - 2E) + 8E$,

$$\Rightarrow (A - 2E)B - 4(A - 2E) = 8E \Rightarrow (A - 2E)B - (A - 2E) \cdot 4E = 8E$$

$$\Rightarrow (A - 2E)(B - 4E) = 8E \Rightarrow (A - 2E) \frac{1}{8}(B - 4E) = E$$

根据可逆矩阵的定义知 $A - 2E$ 可逆, 且 $(A - 2E)^{-1} = \frac{1}{8}(B - 4E)$.

(2) 由(1)结果知 $(A - 2E)^{-1} = \frac{1}{8}(B - 4E)$, 根据逆矩阵的性质 $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$, 其中 k 为不等于零的常数, 有

$$A - 2E = \left[\frac{1}{8}(B - 4E) \right]^{-1} = 8(B - 4E)^{-1}$$

故 $A = 8(B - 4E)^{-1} + 2E$

$$\text{又 } B - 4E = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ (对应元素相减)}$$

因为若 $(A \ E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \ A^{-1})$, 对 $[B - 4E : E]$ 进行初等行变换,

$$[B - 4E : E] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{1,3\text{行互换}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{2\text{行}+1\text{行}\times 3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{2\text{行}\times(-\frac{1}{8})} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{1\text{行}+2\text{行}\times 2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$\text{故 } (B-4E)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \text{ 代入 } A=8(B-4E)^{-1}+2E \text{ 中, 则}$$

$$A=8(B-4E)^{-1}+2E=8\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

(常数与矩阵相乘, 矩阵的每一个元素都需要乘以该常数)

$$=\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ (对应元素相加)}$$

十二【详解】方法 1: 记 $A=[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$, 由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 及 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3+0\alpha_4$,

即 α_1 可以由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 及 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ 即

β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出, 知

$$r[A;\beta]=r[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta]=r[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]=r(A)=r[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]=3$$

系数矩阵的秩与增广矩阵的秩相等, 故 $Ax=\beta$ 有解.

对应齐次方程组 $Ax = 0$ ，其系数矩阵的秩为 3，故其基础解系中含有 $4-3$ (未知量的个数-系数矩阵的秩)个线性无关的解向量，故其通解可以写成 $k\xi$ ， η^* 是 $Ax = \beta$ 的一个特解，根据非齐次线性方程组的解的结构定理，知 $Ax = \beta$ 的通解为 $k\xi + \eta^*$ ，其中 $k\xi$ 是对应齐次方程组 $Ax = 0$ 的通解， η^* 是 $Ax = \beta$ 的一个特解，因

$$\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3 + 0\alpha_4, \text{ 故 } \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 - 0\alpha_4 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0,$$

故 $\xi = [1, -2, 1, 0]^T$ 是 $Ax = 0$ 的一个非零解向量，因为 $Ax = 0$ 的基础解系中只含有一个解向量，故 $\xi = [1, -2, 1, 0]^T$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系。

又

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 即 } A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \beta$$

故 $\eta^* = [1, 1, 1, 1]^T$ 是 $Ax = \beta$ 的一个特解，根据非齐次线性方程组的解的结构定理，方程组的通解为 $k[1, -2, 1, 0]^T + [1, 1, 1, 1]^T$ 。(其中 k 是任意常数)

方法 2: 令 $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ ，则线性非齐次方程为

$$Ax = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]x = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = \beta$$

已知 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ ，故

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

将 $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$ 代入上式，得

$$(2\alpha_2 - \alpha_3)x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = (2\alpha_2 - \alpha_3) + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

$$\Rightarrow 2\alpha_2 x_1 - \alpha_3 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 2\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 3\alpha_2 + \alpha_4$$

$$\Rightarrow (2x_1 + x_2)\alpha_2 - \alpha_3x_1 + \alpha_3x_3 + \alpha_4x_4 - 3\alpha_2 - \alpha_4 = 0$$

$$\Rightarrow (2x_1 + x_2 - 3)\alpha_2 + (-x_1 + x_3)\alpha_3 + (x_4 - 1)\alpha_4 = 0$$

由已知 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，根据线性无关的定义，不存在不全为零的常数使得

$$k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = 0, \text{ 上式成立当且仅当}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ x_4 - 1 = 0 \end{cases}$$

其系数矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，因为 3 阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ ，其秩为 3，故其齐次

线性方程组的基础解系中存在 1 个(4-3)线性无关的解向量，取自由未知量 $x_3 = k$ ，则方程组有解

$$x_4 = 1, x_3 = k, x_1 = x_3 = k, x_2 = -2k + 3$$

故方程组 $Ax = \beta$ 有通解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ -2k+3 \\ k \\ 1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \text{ (其中 } k \text{ 是任意常数)}$$