

2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题解析

一、填空题

(1) 【答案】 $-\frac{\alpha}{\beta}$

【使用概念】 设 $y = f(x)$ 在 x 处可导, 且 $f(x) \neq 0$, 则函数 y 关于 x 的弹性在 x 处的值为

$$\frac{Ey}{Ex} = \frac{x}{y} y' = \frac{x}{f(x)} f'(x)$$

【详解】 由 $Q = AL^\alpha K^\beta$, 当 $Q=1$ 时, 即 $AL^\alpha K^\beta = 1$, 有 $K = A^{-\frac{1}{\beta}} L^{\frac{\alpha}{\beta}}$, 于是 K 关于 L 的弹性为:

$$\frac{EK}{EL} = \frac{L}{K} K' = \frac{L}{A^{-\frac{1}{\beta}} L^{\frac{\alpha}{\beta}}} \frac{d\left(A^{-\frac{1}{\beta}} L^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}{dL} = L \cdot \frac{-\frac{\alpha}{\beta} A^{-\frac{1}{\beta}} L^{\frac{\alpha}{\beta}-1}}{A^{-\frac{1}{\beta}} L^{\frac{\alpha}{\beta}}} = -\frac{\alpha}{\beta}$$

(2) 【答案】 $1.2W_{t-1} + 2$

【详解】 W_t 表示第 t 年的工资总额, 则 W_{t-1} 表示第 $t-1$ 年的工资总额, 再根据每年的工资总额比上一年增加 20% 的基础上再追加 2 百万, 所以由差分的定义可得 W_t 满足的差分方程是:

$$W_t = (1 + 20\%)W_{t-1} + 2 = 1.2W_{t-1} + 2$$

(3) 【答案】 -3

【详解】

方法 1: 由初等变换(既可作初等行变换, 也可作初等列变换). 不改变矩阵的秩, 故对 A 进行初等变换

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix} \xrightarrow{1\text{行} \times (-1) \text{分别加到} 2, 3, 4 \text{行}} \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1-k & k-1 & 0 & 0 \\ 1-k & 0 & k-1 & 0 \\ 1-k & 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2,3,4\text{列分别加到1列}} \begin{bmatrix} k+3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix}$$

可见只有当 $k=-3$ 时, $r(A)=3$. 故 $k=-3$.

方法2: 由题设 $r(A)=3$, 故应有四阶矩阵行列式 $|A|=0$. 由

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix} \xrightarrow{1\text{行} \times (-1) \text{分别加到} 2,3,4 \text{行}} \begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1-k & k-1 & 0 & 0 \\ 1-k & 0 & k-1 & 0 \\ 1-k & 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{2,3,4\text{列分别加到1列}} \begin{vmatrix} k+3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix} = (k+3)(k-1)^3 = 0,$$

解得 $k=1$ 或 $k=-3$. 当 $k=1$ 时,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\text{行} \times (-1) \text{分别加到} 2,3,4 \text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可知, 此时 $r(A)=1$, 不符合题意, 因此一定有 $k=-3$.

(4) 【答案】 $\frac{1}{12}$

【所用概念性质】切比雪夫不等式为: $P\{|X-E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

期望和方差的性质: $E(X+Y) = EX + EY$; $D(X+Y) = DX + 2\text{cov}(X,Y) + DY$

【详解】把 $X+Y$ 看成是一个新的随机变量, 则需要求出其期望和方差.

故 $E(X+Y) = EX + EY = -2 + 2 = 0$

又相关系数的定义: $\rho(X,Y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$

则 $\text{cov}(X,Y) = \rho(X,Y)\sqrt{DX}\sqrt{DY} = (-0.5) \times \sqrt{1} \times \sqrt{4} = -1$

$D(X+Y) = DX + 2\text{cov}(X,Y) + DY = 1 + 2 \times (-1) + 4 = 3$

所以由切比雪夫不等式:

$$P\{|X+Y|\geq 6\}=P\{|X+Y-E(X+Y)|\geq 6\}\leq \frac{D(X+Y)}{6^2}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

(5) 【答案】 F ; (10,5)

【所用概念】 1. F 分布的定义: $F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$ 其中 $X \sim \chi^2(n_1)$ $Y \sim \chi^2(n_2)$

2. χ^2 分布的定义: 若 $Z_1, \dots, Z_n$ 相互独立, 且都服从标准正态分布 $N(0,1)$, 则 $\sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi^2(n)$

3. 正态分布标准化的定义: 若 $Z \sim N(u, \sigma^2)$, 则 $\frac{Z-u}{\sigma} \sim N(0,1)$

【详解】 因为 $X_i \sim N(0, 2^2) i=1, 2, \dots, 15$, 将其标准化有 $\frac{X_i-0}{2} = \frac{X_i}{2} \sim N(0,1)$, 从而根据卡方分布的定义

$$\left(\frac{X_1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{X_{10}}{2}\right)^2 \sim \chi^2(10), \left(\frac{X_{11}}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{X_{15}}{2}\right)^2 \sim \chi^2(5),$$

由样本的独立性可知, $\left(\frac{X_1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{X_{10}}{2}\right)^2$ 与 $\left(\frac{X_{11}}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{X_{15}}{2}\right)^2$ 相互独立.

故, 根据 F 分布的定义

$$Y = \frac{\left[\left(\frac{X_1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{X_{10}}{2}\right)^2\right] / 10}{\left[\left(\frac{X_{11}}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{X_{15}}{2}\right)^2\right] / 5} = \frac{X_1^2 + \dots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + \dots + X_{15}^2)} \sim F(10, 5).$$

故 Y 服从第一个自由度为10, 第二个自由度为5的 F 分布.

二、选择题

(1) 【答案】 [B]

【详解】

方法1: 由 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x-a} = -1$, 知

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x-a} \cdot (x-a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x-a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x-a) = -1 \cdot 0 = 0$$

又函数 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续, 根据函数在某点连续的定义, 左极限等于右

极限等于函数在这一点值, 所以 $f'(a)=0$, 于是有

$$f''(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x - a} = -1,$$

即 $f'(a) = 0$, $f''(a) = -1 < 0$, 根据判定极值的第二充分条件: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数且 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, 当 $f''(x_0) < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值. 知 $x = a$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 因此, 正确选项为(B).

方法2: 由 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x - a} = -1$, 及极限保号性定理: 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$),

那么存在常数 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$), 知存在 $x = a$ 的去心邻域, 在此去心邻域内 $\frac{f'(x)}{x - a} < 0$. 于是推知, 在此去心邻域内当 $x < a$ 时

$f'(x) > 0$; 当 $x > a$ 时 $f'(x) < 0$. 又由条件知 $f(x)$ 在 $x = a$ 处连续, 由判定极值的第一充分条件: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 且在 x_0 的某去心 δ 邻域内可导, 若

$x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$, 而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值, 知 $f(a)$ 为 $f(x)$ 的极大值. 因此, 选 (B).

(2) 【答案】(D)

【详解】应先写出 $g(x)$ 的表达式.

当 $0 \leq x < 1$ 时, $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$, 有

$$g(x) = \int_0^x f(u) du = \int_0^x \frac{1}{2}(u^2 + 1) du = \frac{1}{6}u^3 \Big|_0^x + \frac{1}{2}u \Big|_0^x = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x,$$

当 $1 \leq x \leq 2$ 时, $f(x) = \frac{1}{3}(x - 1)$, 有

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x f(u) du = \int_0^1 f(u) du + \int_1^x f(u) du = \int_0^1 \frac{1}{2}(u^2 + 1) du + \int_1^x \frac{1}{3}(u - 1) du \\ &= \frac{1}{6}u^3 \Big|_0^1 + \frac{1}{2}u \Big|_0^1 + \frac{1}{6}u^2 \Big|_1^x - \frac{1}{3}u \Big|_1^x = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}(x - 1)^2 \end{aligned}$$

即
$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{6}(x - 1)^2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x \right) = \frac{2}{3}$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}(x - 1)^2 \right) = \frac{2}{3}$,

且 $g(1) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}(1-1)^2 = \frac{2}{3},$

所以由函数连续的定义, 知 $g(x)$ 在点 $x=1$ 处连续, 所以 $g(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 内连续, 选(D).

同样, 可以验证(A)、(B)不正确, $0 < x < 1$ 时, $g'(x) = \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x\right)' = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} > 0$, 单调增, 所以(B)递减错; 同理可以验证当 $1 < x < 2$ 时, $g'(x) = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}(x-1)^2\right)' = \frac{1}{3}(x-1) > 0$, 单调增, 所以 $g(0) \leq g(x) \leq g(2)$, 即 $0 \leq g(x) \leq \frac{5}{6}$ 与选项(A)无界矛盾.

(3) 【答案】 (C)

【详解】由所给矩阵 A, B 观察, 将 A 的 2, 3 列互换, 再将 A 的 1, 4 列互换, 可得 B . 根据初等矩阵变换的性质, 知将 A 的 2, 3 列互换相当于在矩阵 A 的右侧乘以 E_{23} , 将 A 的 1, 4 列互换相当于在矩阵 A 的右侧乘以 E_{14} , 即

$$AE_{23}E_{14} = B, \text{ 其中 } E_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由题设条件知 $P_1 = E_{14}, P_2 = E_{23}$, 因此 $B = AP_2P_1$.

由于对初等矩阵 E_{ij} 有, $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$, 故 $P_1^{-1} = P_1, P_2^{-1} = P_2$.

因此, 由 $B = AP_2P_1$, 及逆矩阵的运算规律, 有

$$B^{-1} = (AP_2P_1)^{-1} = P_1^{-1}P_2^{-1}A^{-1} = P_1P_2A^{-1}.$$

(4) 【答案】 (D)

【详解】由题设, A 是 n 阶矩阵, α 是 n 维列向量, 即 α^T 是一维行向量, 可知 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}$ 是

$n+1$ 阶矩阵. 显然有秩 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} = \text{秩}(A) \leq n \leq n+1$, 即系数矩阵 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}$ 非列满秩, 由

齐次线性方程组有非零解的充要条件: 系数矩阵非列或行满秩, 可知齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix} = 0 \text{ 必有非零解.}$$

(5) 【答案】 A

【详解】 掷硬币结果不是正面向上就是反面向上，所以 $X+Y=n$ ，从而 $Y=n-X$ ，

故 $DY = D(n-X) = DX$

由方差的定义： $DX = EX^2 - (EX)^2$ ， 所以

$$\begin{aligned} DY &= D(n-X) = E(n-X)^2 - [E(n-X)]^2 = E(n^2 - 2nX + X^2) - (n-EX)^2 \\ &= n^2 - 2nEX + EX^2 - n^2 + 2nEX - (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2 = DX \end{aligned}$$

由协方差的性质： $\text{cov}(X, c) = 0$ (c 为常数)； $\text{cov}(aX, bY) = ab \text{cov}(X, Y)$

$$\text{cov}(X_1 + X_2, Y) = \text{cov}(X_1, Y) + \text{cov}(X_2, Y)$$

所以 $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, n-X) = \text{cov}(X, n) - \text{cov}(X, X) = 0 - DX = -DX$

由相关系数的定义，得 $\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{-DX}{\sqrt{DX} \sqrt{DX}} = -1$

三 【变限积分求导公式】 $[\int_a^{f(x)} g(t) dt]'_x = g[f(x)] f'(x)$

【详解】 根据复合函数求导公式，有

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dx}. \quad (*)$$

在 $e^{xy} - xy = 2$ 两边分别对 x 求导，得

$$e^{xy} (y + x \frac{dy}{dx}) - (y + x \frac{dy}{dx}) = 0,$$

即 $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$

在 $e^x = \int_0^{x-z} \frac{\sin t}{t} dt$ 两边分别对 x 求导，得

$$e^x = \frac{\sin(x-z)}{x-z} \cdot (1 - \frac{dz}{dx}), \text{ 即 } \frac{dz}{dx} = 1 - \frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}.$$

将其代入(*)式，得

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{y}{x} \frac{\partial f}{\partial y} + \left(1 - \frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)} \right) \frac{\partial f}{\partial z}.$$

四 【详解】 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x+c}{x-c})^x = \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x-c+2c}{x-c})^x \quad (\text{把 } x+c \text{ 写成 } x-c+2c)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x-c+2c}{x-c})^{\frac{x-c}{2c} \cdot \frac{2cx}{x-c}} \quad (\text{把 } x \text{ 写成 } \frac{x-c}{2c} \cdot \frac{2cx}{x-c})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2c}{x-c} \right)^{\frac{x-c}{2c}} \right]^{\frac{2cx}{x-c}} \quad (\text{利用幂函数的性质 } a^{mn} = (a^m)^n)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln \left[\left(1 + \frac{2c}{x-c} \right)^{\frac{x-c}{2c}} \right]^{\frac{2cx}{x-c}}} \quad (\text{利用对数性质 } e^{\ln f(x)} = f(x))$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{2cx}{x-c} \ln \left[\left(1 + \frac{2c}{x-c} \right)^{\frac{x-c}{2c}} \right]} \quad (\text{利用对数性质 } \ln f(x)^{g(x)} = g(x) \ln f(x))$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2cx}{x-c} \ln \left[\left(1 + \frac{2c}{x-c} \right)^{\frac{x-c}{2c}} \right]} \quad (\text{利用 } y = e^x \text{ 函数的连续性, } \lim_{x \rightarrow \infty} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)})$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2cx}{x-c} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left[\left(1 + \frac{2c}{x-c} \right)^{\frac{x-c}{2c}} \right]} \quad (\text{当各部分极限均存在时,})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2cx}{x-c} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left[\left(1 + \frac{2c}{x-c} \right)^{\frac{x-c}{2c}} \right]} \quad (\text{利用 } y = \ln x \text{ 函数的连续性, } \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln f(x)] = \ln [\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)])$$

$$= e^{2c \cdot \ln e} \quad (\text{利用 } \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e)$$

$$= e^{2c} \quad (\ln e = 1)$$

又因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 故在闭区间 $[x-1, x]$ 上连续, 在开区间 $(x-1, x)$ 内可导, 那么又由拉格朗日中值定理, 有

$$f(x) - f(x-1) = f'(\xi)[x - (x-1)] = f'(\xi), x-1 < \xi < x$$

左右两边同时求极限, 于是

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - f(x-1)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(\xi) = e,$$

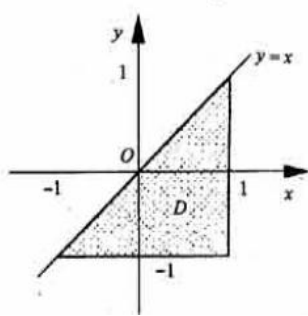
因为 $x-1 < \xi < x$, x 趋于无穷大时, ξ 也趋向于无穷大

$$\text{由题意, } \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x+c}{x-c})^x = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - f(x-1)], \text{ 从而 } e^{2c} = e, \text{ 故 } c = \frac{1}{2}$$

五 【详解】 积分区域如图所示，可以写成

$$-1 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1$$

$$\iint_D y[1 + xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}] dx dy = \iint_D y dx dy + \iint_D xy e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy,$$



其中， $\iint_D y dx dy = \int_{-1}^1 dy \int_y^1 y dx = \int_{-1}^1 y(1-y) dy = -\frac{2}{3};$

$$\iint_D xy e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy = \int_{-1}^1 y dy \int_y^1 x e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx = \int_{-1}^1 y dy \int_y^1 e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} d(\frac{1}{2}x^2)$$

$$= \int_{-1}^1 y dy \int_y^1 e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} d[\frac{1}{2}(x^2+y^2)] = \int_{-1}^1 (e^{\frac{1}{2}(1+y^2)} - e^{y^2}) dy$$

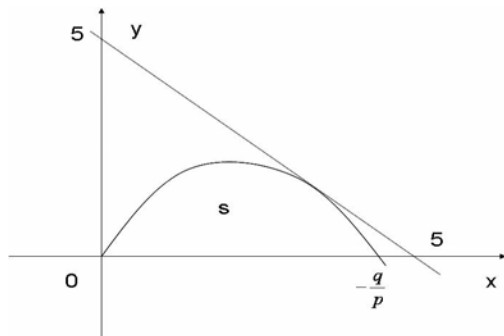
$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (e^{\frac{1}{2}(1+y^2)} - e^{y^2}) dy^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{\frac{1}{2}(1+y^2)} dy^2 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{y^2} dy^2$$

$$= \int_{-1}^1 e^{\frac{1}{2}(1+y^2)} d[\frac{1}{2}(1+y^2)] - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{y^2} dy^2 = e^{\frac{1}{2}(1+y^2)} \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{2} e^{y^2} \Big|_{-1}^1 = 0$$

于是

$$\iint_D y[1 + xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}] dx dy = -\frac{2}{3}$$

六 【详解】 方法1：依题意知，抛物线如图所示，



令 $y = px^2 + qx = x(px + q) = 0$ ，求得它与 x 轴交点的横坐标为： $x_1 = 0, x_2 = -\frac{q}{p}$.

根据定积分的定义，面积 S 为

$$S = \int_0^{-\frac{q}{p}} (px^2 + qx) dx = \left(\frac{p}{3} x^3 + \frac{q}{2} x^2 \right) \Big|_0^{-\frac{q}{p}} = \frac{q^3}{6p^2} \quad (\text{注: } \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C)$$

因直线 $x + y = 5$ 与抛物线 $y = px^2 + qx$ 相切，故它们有唯一公共点. 由方程组

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y = px^2 + qx \end{cases}$$

求其公共解，消去 y ，得 $px^2 + (q+1)x - 5 = 0$ ，因为其公共解唯一，则该一元二次方程只有唯一解，故其判别式必为零，即

$$\Delta = (q+1)^2 - 4 \times p \times (-5) = (q+1)^2 + 20p = 0,$$

解得
$$p = -\frac{1}{20}(q+1)^2.$$

将 p 代入 S 中，得

$$S(q) = \frac{q^3}{6p^2} = \frac{q^3}{6[-\frac{1}{20}(q+1)^2]^2} = \frac{200q^3}{3(q+1)^4}.$$

根据函数除法的求导公式，

$$S'(q) = \frac{(200q^3)' \times [3(q+1)^4] - [3(q+1)^4]' \times (200q^3)}{[3(q+1)^4]^2} = \frac{200q^2(3-q)}{3(q+1)^5}$$

根据驻点的定义，令 $S'(q) = 0$ ，已知有 $q > 0$ ，得唯一驻点 $q = 3$.

当 $1 < q < 3$ 时， $S'(q) > 0$ ； $q > 3$ 时， $S'(q) < 0$. 故根据极值判定的第一充分条件知， $q = 3$ 时， $S(q)$ 取唯一极大值，即最大值.

从而最大值为
$$S = S(3) = \frac{225}{32}.$$

方法2： 设抛物线 $y = px^2 + qx$ 与直线 $x + y = 5$ 相切的切点坐标为 (x_0, y_0) ，切点既在抛物

线上，也在直线上，于是满足方程有 $y_0 = px_0^2 + qx_0$ 和 $x_0 + y_0 = 5$.

抛物线与直线在切点处的切线斜率是相等的，即一阶导数值相等. 在 $y = px^2 + qx$

左右两边关于 x 求导，得 $y' = 2px + q$ ，在 $x + y = 5$ 左右两边关于 x 求导，得 $y' = -1$ ，

把切点坐标 (x_0, y_0) 代入，得

$$y'|_{x=x_0} = 2px_0 + q = -1 \Rightarrow x_0 = -\frac{q+1}{2p}$$

由 $x_0 + y_0 = 5 \Rightarrow y_0 = 5 - x_0$ ，将两结果代入 $y_0 = px_0^2 + qx_0$ 得

$$y_0 = 5 - x_0 = 5 - \left(-\frac{q+1}{2p}\right) = px_0^2 + qx_0 = p\left(-\frac{q+1}{2p}\right)^2 + q\left(-\frac{q+1}{2p}\right)$$

整理得

$$p = -\frac{1}{20}(q+1)^2.$$

将 p 代入 S 中, 得

$$S(q) = \frac{200q^3}{3(q+1)^4}.$$

根据函数除法的求导公式,

$$S'(q) = \frac{(200q^3)' \times [3(q+1)^4] - [3(q+1)^4]' \times (200q^3)}{[3(q+1)^4]^2} = \frac{200q^2(3-q)}{3(q+1)^5}$$

根据驻点(即使得一阶导数为零的点)的定义, 令 $S'(q) = 0$, 已知有 $q > 0$, 得唯一

驻点 $q = 3$. 当 $1 < q < 3$ 时, $S'(q) > 0$; $q > 3$ 时, $S'(q) < 0$; 故根据极值判定的第一充分

条件知, $q = 3$ 时, $S(q)$ 取唯一极大值, 即最大值.

$$\text{从而最大值为 } S = S(3) = \frac{225}{32}.$$

七【详解】将要证的等式中的 ξ 换成 x , 移项, 并命

$$\varphi(x) = f'(x) - \frac{x-1}{x}f(x)$$

问题转化为证在区间 $(0,1)$ 内 $\varphi(x)$ 存在零点. 将

$$f'(x) - \frac{x-1}{x}f(x) = 0$$

看成一个微分方程, 用分离变量法求解. 由

$$\frac{df(x)}{f(x)} = \frac{x-1}{x}dx$$

$$\text{两边积分得 } \int \frac{df(x)}{f(x)} = \int \frac{x-1}{x}dx = \int \left(1 - \frac{1}{x}\right)dx$$

利用 $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ 及 $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$, 得

$$\ln|f(x)| = x - \ln|x| + C_1 \Rightarrow \ln|f(x)| = \ln \frac{Ce^x}{|x|} \Rightarrow f(x) = \frac{Ce^x}{x},$$

即 $xe^{-x}f(x)=C$, 命 $F(x)=xe^{-x}f(x)$. 由

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)dx, (k>1)$$

及积分中值定理(如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一个

点 ξ , 使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)(a\leq \xi\leq b)$), 知至少存在一点 $\eta\in(0,\frac{1}{k})\subset[0,1]$, 使

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)dx=\eta e^{1-\eta}f(\eta)$$

且 $F(\eta)=\eta e^{-\eta}f(\eta)$, $F(1)=e^{-1}f(1)$. 把 $f(1)=\eta e^{1-\eta}f(\eta)$ 代入, 则

$$F(1)=e^{-1}f(1)=e^{-1}\eta e^{1-\eta}f(\eta)=\eta e^{-\eta}f(\eta)=F(\eta)$$

那么 $F(x)$ 在 $[\eta,1]$ 上连续, 在 $(\eta,1)$ 内可导, 由罗尔中值定理知, 至少存在一点 $\xi\in(\eta,1)\subset[0,1]$,

使得

$$F'(\xi)=e^{-\xi}f(\xi)+\xi e^{-\xi}f'(\xi)=0$$

即 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

八 【详解】 由已知条件可见 $f_n'(x)-f_n(x)=x^{n-1}e^x$, 这是以 $f_n(x)$ 为未知函数的一阶线性

非齐次微分方程, 其中 $p(x)=-1, q(x)=x^{n-1}e^x$, 代入通解公式

$$f(x)=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$$

得其通解为

$$f_n(x)=e^{\int dx}\left(\int x^{n-1}e^xe^{-\int dx}dx+C\right)=e^x\left(\frac{x^n}{n}+C\right),$$

由条件 $f_n(1)=\frac{e}{n}$, 又 $f_n(1)=e\left(\frac{1}{n}+C\right)$, 得 $C=0$, 故 $f_n(x)=\frac{x^n e^x}{n}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n e^x}{n}=e^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\text{记 } S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \text{ 则 } a_n=\frac{1}{n}, \rho=\lim_{n\rightarrow\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\rightarrow\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1, \text{ 则其收敛半径为 } R=\frac{1}{\rho}=1,$$

收敛区间为 $(-1,1)$. 当 $x\in(-1,1)$ 时, 根据幂级数的性质, 可以逐项求导,

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}, \text{ 其中 } \frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

故根据函数积分和求导的关系 $\int f'(x)dx = f(x) + C$, 得 $\int_0^x S'(x)dx = S(x)\big|_0^x = S(x) - S(0)$

又由于 $S(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n} = \frac{0}{1} + \frac{0^2}{2} + \cdots = 0$, 所以

$$S(x) = S(0) + \int_0^x S'(x)dx = 0 + \int_0^x \frac{1}{1-x}dx = -\ln(1-x),$$

即有 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), x \in (-1, 1)$

当 $x = -1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$. 级数在此点处收敛, 而右边函数连续, 因此成立的

范围可扩大到 $x = -1$ 处, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), x \in [-1, 1)$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = -e^x \ln(1-x), x \in [-1, 1)$

九【详解】 (1) 线性方程组 $AX = \beta$ 有解但不唯一, 即有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < n = 3$,

将增广矩阵作初等行变换, 得

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \vdots & 1 \\ a & 1 & 1 & \vdots & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{2\text{行}-1\text{行}, 3\text{行}-1\text{行}(-a)\text{倍}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & \vdots & -2-a \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{2\text{行加到3行}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) & \vdots & -(a+2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因为方程组 $AX = \beta$ 有解但不唯一, 所以 $r(A) = r(\bar{A}) < 3$, 故 $a = -2$.

(2) 由(1), 有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

由

$$\begin{aligned}
|\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda+2 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{2,3列加到1列}} \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ \lambda & \lambda+2 & -1 \\ \lambda & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow{\text{提出1列公因子}\lambda} \lambda \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda+2 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{1行}\times(-1)\text{分别加到2,3行}} \lambda \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & \lambda+3 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} \\
&= \lambda(\lambda+3)(\lambda-3) = 0
\end{aligned}$$

故 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 3$.

当 $\lambda_1 = 0$ 时,

$$(0E - A) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{1行的}(-1), 2\text{倍} \\ \text{分别加到2,3行}}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{2行加到3行}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是得方程组 $(0E - A)x = 0$ 的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

可见, $r(0E - A) = 2$, 可知基础解系的个数为 $n - r(0E - A) = 3 - 2 = 1$, 故有1个自由未知量, 选 x_2 为自由未知量, 取 $x_2 = 1$, 解得对应的特征向量为 $\xi_1 = (1, 1, 1)^T$.

当 $\lambda_1 = 3$ 时,

$$\begin{aligned}
(3E - A) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1,2行互换}} \begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{\text{3行}-2\text{行}} \begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{1行}\times 2\text{加到2行}} \begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

于是得方程组 $(3E - A)x = 0$ 的同解方程组为

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 9x_2 = 0 \end{cases}$$

可见, $r(3E - A) = 2$, 可知基础解系的个数为 $n - r(3E - A) = 3 - 2 = 1$, 故有1个自由未知

量, 选 x_1 为自由未知量, 取 $x_1 = 1$, 解得对应的特征向量为 $\xi_2 = (1, 0, -1)^T$.

当 $\lambda_1 = -3$ 时,

$$(-3E - A) = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{1,2\text{行互换}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{1\text{行}(-4)\text{倍}, 2\text{倍} \\ \text{分别加到} 2, 3\text{行}}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{行加到} 3\text{行}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是得方程组 $(-3E - A)x = 0$ 的同解方程组为

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

可见, $r(-3E - A) = 2$, 可知基础解系的个数为 $n - r(-3E - A) = 3 - 2 = 1$, 故有 1 个自由

未知量, 选 x_2 为自由未知量, 取 $x_2 = 2$, 解得对应的特征向量为 $\xi_3 = (-1, 2, -1)^T$.

由于 A 是实对称矩阵, 其不同特征值的特征向量相互正交, 故这三个不同特征值的特征向量相互正交, 之需将 ξ_1, ξ_2, ξ_3 单位化,

$$\beta_1 = \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \frac{\xi_2}{\|\xi_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta_3 = \frac{\xi_3}{\|\xi_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

其中, $\|\xi_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}, \|\xi_2\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \|\xi_3\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

令

$$Q = [\beta_1, \beta_2, \beta_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

则有 $Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

十 【详解】(1)由题设条件,

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{A_{ij}}{|A|} x_i x_j = \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} x_i x_j = \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j \\
&= \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^n x_i (A_{i1} x_1 + A_{i2} x_2 + \dots + A_{in} x_n) \\
&= \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^n x_i (A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \left[\sum_{i=1}^n x_i (A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}) \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{|A|} [x_1 (A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}) + x_2 (A_{21}, A_{22}, \dots, A_{2n}) + \dots + x_n (A_{n1}, A_{n2}, \dots, A_{nn})] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{|A|} (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{A^{*T}}{|A|} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X^T \frac{A^{*T}}{|A|} X \\
&\underline{\underline{(*)}} X^T A^{-1} X
\end{aligned}$$

其中(*)的理由: A 是可逆的实对称矩阵, 故 $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$, 因此由实对称的定义知, A^{-1} 也是实对称矩阵, 又由伴随矩阵的性质 $A^*A = |A|E$, 知 $A^* = |A|A^{-1}$, 因此 A^* 也是实对称矩阵, $A^{*T} = A^*$, 故(*)成立.

(2) 因为 $(A^{-1})^T AA^{-1} = (A^T)^{-1}E = A^{-1}$, 所以由合同的定义知 A 与 A^{-1} 合同.

由实对称矩阵 A 与 B 合同的充要条件: 二次型 $x^T Ax$ 与 $x^T Bx$ 有相同的正、负惯性指数.

可知, $g(X) = X^T AX$ 与 $f(X)$ 有相同的正、负惯性指数,

故它们有相同的规范形.

十一 【应用定理】(i) 期望的性质: $E(X+Y) = EX + EY$; 独立随机变量方差的性质: 若随机变量 X 和 Y 独立, 则 $D(X+Y) = DX + DY$

(ii) 列维-林德伯格中心极限定理: 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立同分布, 方差存在, 记 u 与 σ^2 ($0 < \sigma^2 < +\infty$) 分别是它们共同的期望与方差, 则对任意实数 x , 恒有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n X_i - nu \right) \leq x \right\} = \Phi(x)$$

(通俗的说: 独立同分布的随机变量, 其期望方差存在, 则只要随机变量足够的多, 这些随机变量的和以正态分布为极限分布)

(iii) 正态分布标准化: 若 $Z \sim N(u, \sigma^2)$, 则 $\frac{Z-u}{\sigma} \sim N(0,1)$

【详解】设 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是装运的第 i 箱的重量(单位: 千克), n 是所求箱数. 由题设可以将 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 视为独立同分布的随机变量, 而 n 箱的总重量 $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ 是独立同分布随机变量之和.

由题设, 有 $E(X_i) = 50, \sqrt{D(X_i)} = 5$ (单位: 千克)

所以 $E(S_n) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = EX_1 + EX_2 + \dots + EX_n = 50n$

$D(S_n) = D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = DX_1 + DX_2 + \dots + DX_n = 25n$

则根据列维—林德伯格中心极限定理, 知 S_n 近似服从正态分布 $N(50n, 25n)$,

箱数 n 根据下述条件确定

$$\begin{aligned} P\{S_n \leq 5000\} &= P\left\{ \frac{S_n - 50n}{5\sqrt{n}} \leq \frac{5000 - 50n}{5\sqrt{n}} \right\} \quad (\text{将 } S_n \text{ 标准化}) \\ &\approx \Phi\left(\frac{1000 - 10n}{\sqrt{n}}\right) > 0.977 = \Phi(2) \end{aligned}$$

由此得

$$\frac{1000 - 10n}{\sqrt{n}} > 2,$$

从而 $n < 98.0199$, 即最多可以装 98 箱.

十二 【详解】由题设条件 X 和 Y 是正方形 $G = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 3\}$ 上的均匀分布,

则 X 和 Y 的联合密度为:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 3, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (\text{二维均匀分布的概率密度为 } \frac{1}{\text{面积}})$$

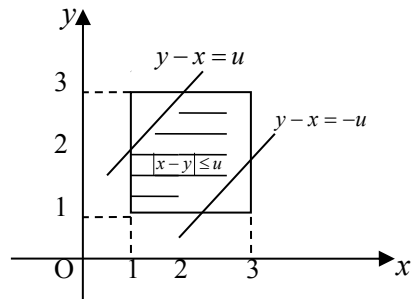
由分布函数的定义: $F(u) = P\{U \leq u\} = P\{|X - Y| \leq u\}$

(1) 当 $u < 0$ 时, $F(u) = 0$ (因为 $|X - Y|$ 是非负的, 所以小于 0 是不可能事件)

(2) 当 $u \geq 2$ 时, $F(u) = 1$ (因为 X 和 Y 最大为 3, X 和 Y 最小为 1, 所以 $|X - Y|$ 最大也就只能为 2, 所以 $|X - Y| \leq 2$ 是必然事件, 概率为 1)

(3) 当 $0 \leq u < 2$ 时, $F(u) = P\{U \leq u\}$ 相当于阴影部分所占的概率大小. 如图所示:

$$\begin{aligned} F(u) &= P\{U \leq u\} = P\{|X - Y| \leq u\} \\ &= \frac{S_{\text{阴影面积}}}{S_{\text{总面积}}} = \frac{1}{4} [4 - (2 - u)^2] \\ &= 1 - \frac{1}{4} (2 - u)^2 \end{aligned}$$



(二维均匀分布中各部分所占的概率, 相当于用这部分的面积除以总面积, 这里阴影部分面积是用总面积减去两个三角形的面积)

于是随机变量 U 的概率密度为:

$$p(u) = F'(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-u), & 0 < u < 2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$