

2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题

(1) 【答案】 $-\frac{\sqrt{2}}{6}$

【详解】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{(x+2)(x-1)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x})(\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x})}{(x+2)(x-1)(\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3-x-(1+x)}{(x+2)(x-1)(\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x})}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(1-x)}{(x+2)(x-1)(\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x})} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(x+2)(\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x})}$$
$$= -\frac{\lim_{x \rightarrow 1} 2}{\lim_{x \rightarrow 1} (x+2)(\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x})} = -\frac{2}{(1+2)(\sqrt{3-1} + \sqrt{1+1})} = -\frac{1}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

(2) 【答案】 $x-2y+2=0$.

【详解】 在等式 $e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1$ 两边对 x 求导, 其中 y 视为 x 的函数, 得

$$e^{2x+y} (2x+y)' + \sin(xy) (xy)' = 0, \text{ 即 } e^{2x+y} \cdot (2+y') + \sin(xy) \cdot (y+xy') = 0$$

将 $x=0, y=1$ 代入上式, 得 $e \cdot (2+y') = 0$, 即 $y'(0) = -2$. 故所求法线方程斜率 $k = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$,

根据点斜式法线方程为: $y-1 = \frac{1}{2}x$, 即 $x-2y+2=0$.

(3) 【答案】 $\frac{\pi}{8}$

【分析】 根据区域对称性与被积函数的奇偶性: 设 $f(x)$ 在有界闭区域 $[-a, a]$ 上连续, 则

$$\text{有 } \begin{cases} \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, & f(x) \text{ 为偶函数} \\ \int_{-a}^a f(x) dx = 0, & f(x) \text{ 为奇函数} \end{cases},$$

【详解】 由题设知

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos^2 x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx$$

在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上, $x^3 \cos^2 x$ 是奇函数, $\sin^2 x \cos^2 x$ 是偶函数, 故

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos^2 x dx = 0, \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx,$$

$$\text{所以, 原式} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos^2 x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin^2 2x dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4x) dx$$

$$= \frac{1}{4} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x d4x = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{16} \sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} - 0 = \frac{\pi}{8}.$$

(4) 【答案】 $y \arcsin x = x - \frac{1}{2}.$

【详解】

方法1: 因为 $(y \arcsin x)' = y' \arcsin x + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$, 所以原方程 $y' \arcsin x + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = 1$ 可

$$\text{改写为} \quad (y \arcsin x)' = 1,$$

$$\text{两边直接积分, 得} \quad y \arcsin x = x + c.$$

$$\text{又由 } y(\frac{1}{2}) = 0 \text{ 代入上式, 有} \quad 0 \cdot \arcsin x = \frac{1}{2} + c, \text{ 解得 } c = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{故所求曲线方程为} \quad y \arcsin x = x - \frac{1}{2}.$$

方法2: 将原方程写成一阶线性方程的标准形式

$$y' + \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x} y = \frac{1}{\arcsin x}.$$

由一阶线性微分方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 通解公式:

$$f(x) = e^{-\int P(x)dx} \left(C + \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx \right)$$

这里 $P(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}$, $Q(x) = \frac{1}{\arcsin x}$, 代入上式得:

$$y = e^{-\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x} dx} \left[C + \int \frac{1}{\arcsin x} e^{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x} dx} dx \right]$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\int \frac{1}{\arcsin x} d \arcsin x} \left[C + \int \frac{1}{\arcsin x} e^{\int \frac{1}{\arcsin x} d \arcsin x} dx \right] \\
&= e^{-\ln \arcsin x} \left[C + \int \frac{1}{\arcsin x} e^{\ln \arcsin x} dx \right] \\
&= \frac{1}{\arcsin x} \left[C + \int \frac{\arcsin x}{\arcsin x} dx \right] = \frac{C}{\arcsin x} + \frac{x}{\arcsin x}
\end{aligned}$$

又由 $y(\frac{1}{2}) = 0$, 解得 $C = -\frac{1}{2}$. 故曲线方程为: $y \arcsin x = x - \frac{1}{2}$.

(5) 【答案】 -2

【详解】方法1: 利用初等行变换化增广矩阵为阶梯形,有

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[互换]{1,3行} \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow[分别加到2,3行]{1行的(-1),(-a)倍} \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 3 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1+2a \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{2行加到3行} \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 3 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & 2(2+a) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

由非齐次线性方程组有无穷多解的充要条件: 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 方程组 $Ax = b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < n$. 可见, 只有当 $a = -2$ 时才有秩 $r(\bar{A}) = r(A) = 2 < 3$, 对应方程组有无穷多个解.

方法2: 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 方程组 $Ax = b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < n$, 则方程组

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ 有无穷多解 } \Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < 3. \text{ 从而有 } |A| = 0, \text{ 即}$$

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \xrightarrow[加到1行]{2,3行分别} \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \xrightarrow[1行提出]{(a+2)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow[加到2,3行]{1行 \times (-1) 分别} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(a+2) \begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & a-1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$= (a+2)(a-1)^2 = 0,$$

则, $a=1$ 或 $a=-2$.

当 $a=1$ 时,

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{1\text{行} \times (-1) \text{分别加到} 2, 3\text{行}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right]$$

可见 $r(A)=1 \neq r(\bar{A})=2$, 原方程组无解.

当 $a=-2$ 时, 有

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{1, 3\text{行互换}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{2\text{行}-1\text{行}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{1\text{行} \times 2 \text{加到} 3\text{行}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{3\text{行}+2\text{行}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{2\text{行} \div (-3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

可知, $r(\bar{A})=r(A)=2 < 3$,

故当 $a=-2$ 时, 原方程组有无穷多解.

二、选择题

(1) 【答案】(B)

【详解】因为 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$, 所以在整个定义域内 $f(x)=0$ 或 $f(x)=1$, 所以

$|f(x)| \leq 1$, 于是 $f[f(x)]=1$, 从而 $f\{f[f(x)]\}=f(1)=1$

(2) 【答案】(B)

【详解】根据高阶无穷小的定义: 如果 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 就说 β 是比 α 高阶的无穷小, 由题设当

$x \rightarrow 0$ 时, $(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x \sin x^n$ 高阶的无穷小, 所以

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{x \sin x^n} \xrightarrow{\text{等价}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 \cdot x^2}{x \cdot x^n} \xrightarrow{\text{等价}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}x^{3-n}$$

从而 n 应满足 $n \leq 2$;

又由 $x \sin x^n$ 是比 $(e^{x^2} - 1)$ 高阶的无穷小, 所以根据高阶无穷小的定义有:

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x^n}{e^{x^2} - 1} \stackrel{\text{等价}}{\sim} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x^n}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1}, \text{ 从而 } n \text{ 应满足 } n \geq 2$$

综上, 故正整数 $n = 2$, 故选(B)

(3) 【答案】(C)

【详解】 $y = (x-1)^2(x-3)^2$,

所以 $y' = 2(x-1)(x-3)^2 + 2(x-1)^2(x-3) = 4(x-1)(x-2)(x-3)$

$$\begin{aligned} y'' &= 4[(x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2)] \\ &= 4[x^2 - 5x + 6 + x^2 - 4x + 3 + x^2 - 3x + 2] = 4[3x^2 - 12x + 11] \end{aligned}$$

$$y''' = 4[6x - 12] = 24(x - 2)$$

令 $y'' = 0$, 即 $3x^2 - 12x + 11 = 0$, 因为判别式: $\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 11 = 12 > 0$,

所以 $y'' = 0$ 有两个不相等的实根, 且 $y''(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 11 = -1 \neq 0$, 所以两个实根不为2, 因此在使 $y'' = 0$ 这两点处, 三阶导数 $y''' \neq 0$, (一般地, 若 $f''(x_0) = 0$, 且 $f'''(x_0) \neq 0$, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 一定是曲线 $y = f(x)$ 的拐点), 因此曲线有两个拐点, 故选(C)

或根据 $y'' = 4[3x^2 - 12x + 11]$ 是一条抛物线, 且与 x 轴有两个不相同的交点, 所以在两个交点的左右 y'' 符号不相同, 满足拐点的定义, 因此选(C)

(4) 【答案】(A)

【详解】方法1: 令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F'(x) = f'(x) - 1 = f'(x) - f'(1)$

由于 $f'(x)$ 严格单调减少, 因此当 $x \in (1-\delta, 1)$ 时, $f'(x) > f'(1)$, 则

$F'(x) = f'(x) - f'(1) > 0$; 当 $x \in (1, 1+\delta)$ 时, $f'(x) < f'(1)$, 则

$F'(x) = f'(x) - f'(1) < 0$, 且在 $x=1$ 处 $F'(1) = f'(1) - f'(1) = 0$,

根据判定极值的第一充分条件: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 且在 x_0 的某去心 δ 邻

域内可导, 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$, 而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$

在 x_0 处取得极大值, 知 $F(x)$ 在 $x=1$ 处取极大值, 即在在 $(1-\delta, 1)$ 和 $(1, 1+\delta)$ 内均有

$F(x) < F(1) = 0$, 也即 $f(x) < x$. 故选(A)

方法 2: 排除法, 取 $f(x) = -\frac{(x-1)^2}{2} + x$, 则 $f'(x) = -2(x-1) + 1 = -2x + 3$,

$f''(x) = -2 < 0$, 所以满足题设在区间 $(1-\delta, 1+\delta)$ 内具有二阶导数, $f'(x)$ 严格单调

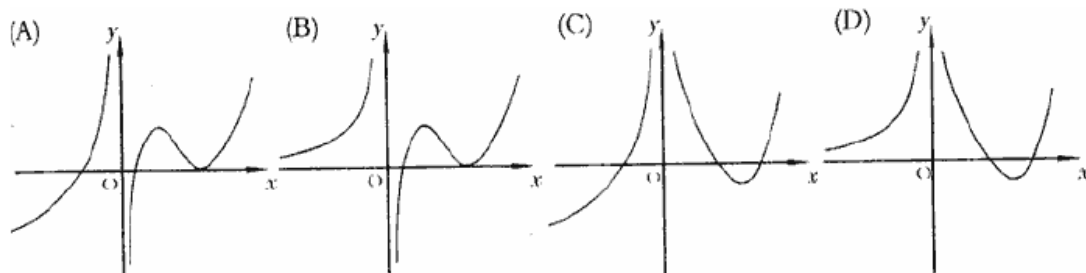
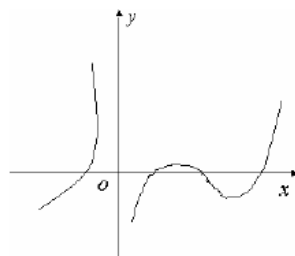
减少, 且 $f(1) = f'(1) = 1$, 当 $x < 1$ 时或 $x > 1$ 时, 均有 $f(x) = -\frac{(x-1)^2}{2} + x < x$, 因此

可以排除(B)、(C)、(D), 选(A)

(5) 【答案】(D)

【详解】从题设图形可见, 在 y 轴的左侧, 曲线 $y = f(x)$ 是严格单调增加的, 因此当 $x < 0$ 时, 一定有 $f'(x) > 0$, 对应

$y = f'(x)$ 图形必在 x 轴的上方, 由此可排除(A), (C);



又 $y = f(x)$ 的图形在 y 轴右侧靠近 y 轴部分是单调增, 所以在这一段内一定有 $f'(x) > 0$, 对应 $y = f'(x)$ 图形必在 x 轴的上方, 进一步可排除(B), 故正确答案为(D).

三【详解】作积分变量变换, 令 $x = \tan u$, 则 $dx = \sec^2 u du$,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{\sec^2 u du}{(2 \tan^2 u + 1) \sqrt{\tan^2 u + 1}} = \int \frac{\sec^2 u du}{(2 \tan^2 u + 1) \sec u} \\ &= \int \frac{du}{(2 \tan^2 u + 1) \cos u} = \int \frac{du}{\left(\frac{2 \sin^2 u}{\cos^2 u} + 1\right) \cos u} = \int \frac{\cos^2 u du}{(2 \sin^2 u + \cos^2 u) \cos u} \\ &= \int \frac{\cos u du}{2 \sin^2 u + \cos^2 u} = \int \frac{\cos u du}{\sin^2 u + 1} = \int \frac{d \sin u}{\sin^2 u + 1} \end{aligned}$$

$$= \arctan(\sin u) + C \frac{\sin u = \frac{\tan u}{\sqrt{1+\tan^2 u}}}{\tan u = x} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C$$

四【分析】应先求出 $f(x)$ 的表达式, 再讨论它的间断点, 首先明确间断点的类型分为两大类: 第一类间断点和第二类间断点, 第一类间断点又可分为: 可去间断点(左右极限存在且相等的间断点)和跳跃间断点(左右极限存在但不相等的间断点); 第二类间断点又可分为: 无穷间断点(有一个极限为无穷的间断点)和振荡间断点(极限值在某个区间变动无限多次).

【详解】 由
$$f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}} = \lim_{t \rightarrow x} e^{\ln \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}} = \lim_{t \rightarrow x} e^{\frac{x}{\sin t - \sin x} \ln \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)}$$

又
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow x} \frac{x}{\sin t - \sin x} \ln \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right) &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{x}{\sin t - \sin x} \ln \left(1 + \frac{\sin t}{\sin x} - 1 \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{x}{\sin t - \sin x} \ln \left(1 + \frac{\sin t - \sin x}{\sin x} \right) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{x}{\sin t - \sin x} \left(\frac{\sin t - \sin x}{\sin x} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} \end{aligned}$$

所以
$$f(x) = \lim_{t \rightarrow x} e^{\frac{x}{\sin t - \sin x} \ln \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)} = e^{\lim_{t \rightarrow x} \frac{x}{\sin t - \sin x} \ln \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)} = e^{\frac{x}{\sin x}}$$

由 $f(x) = e^{\frac{x}{\sin x}}$ 的表达式, 可以看出自变量 x 应满足 $\sin x \neq 0$, 从而 $x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x}{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}} = e^1 = e,$$

所以 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点(左右极限相等, 又进一步可知是可去间断点);

对于非零整数 k ,

$$\lim_{x \rightarrow k\pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k\pi^-} e^{\frac{x}{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow k\pi^-} \frac{x}{\sin x}} \underline{\underline{\sin x \rightarrow 0}} \rightarrow \infty,$$

故 $x = k\pi, k = \pm 1, \pm 2, \dots$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点(无穷间断点)

五【解答】 由 $y = \sqrt{x}$, 有 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, y'' = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$, 抛物线在点 $M(x, y)$ 处的曲率半径

$$\rho = \rho(x) = \frac{1}{K} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \frac{\left[1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}\right|} = \frac{\left[1 + \frac{1}{4x}\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{1}{4x\sqrt{x}}\right|} = \frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}.$$

若已知平面曲线 $\overline{AM}$ 的显式表示为 $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$)，则弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx, \text{ 其中 } f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 有连续的导数.}$$

根据上述结论，所以抛物线上 $\overline{AM}$ 的弧长

$$s = s(x) = \int_1^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_1^x \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx = \int_1^x \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx$$

故

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{\frac{d\rho}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{\left[\frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\right]'}{\left(\int_1^x \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx\right)'} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}(4x+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 4}{\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}} = \frac{3(4x+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2\sqrt{x}}{(4x+1)^{\frac{1}{2}}} = 6\sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\rho}{ds^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d\rho}{ds} \right) \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dx}} = \frac{d}{dx} (6\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\left(\int_1^x \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx\right)'} \\ &= \frac{6}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}} = \frac{6}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1 + 4x}} = \frac{6}{\sqrt{1 + 4x}}. \end{aligned}$$

因此

$$3\rho \frac{d^2\rho}{ds^2} - \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{2}(1+4x)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{6}{\sqrt{1+4x}} - (6\sqrt{x})^2 = 9(1+4x) - 36x = 9$$

六【详解】 $f(x)$ 的反函数是 $g(x)$ ，根据反函数的性质有 $g(f(x)) = x$ ， $\int_0^{f(x)} g(t) dt = x^2 e^x$
两边对 x 求导，有

$$\left(\int_0^{f(x)} g(t) dt\right)' = (x^2 e^x)' \Rightarrow g[f(x)] f'(x) = x^2 e^x + 2x e^x$$

又 $g(f(x)) = x$ ，所以

$$x f'(x) = x^2 e^x + 2x e^x \Rightarrow f'(x) = x e^x + 2e^x, \quad x \in (0, +\infty)$$

$$\begin{aligned}
\text{两边积分} \quad \int f'(x)dx &= \int (xe^x + 2e^x)dx \Rightarrow f(x) = \int xe^x dx + \int 2e^x dx \\
&\Rightarrow f(x) = \int xde^x + 2e^x \Rightarrow f(x) \underline{\text{分部}} xe^x - \int e^x dx + 2e^x \\
&\Rightarrow f(x) = xe^x - e^x + 2e^x + C \Rightarrow f(x) = xe^x + e^x + C.
\end{aligned}$$

由于题设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 所以在 $x=0$ 处连续, 故

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (xe^x + e^x + C) = 1 + C = 0,$$

所以 $C = -1$, 于是

$$f(x) = xe^x + e^x - 1, \quad x \in [0, +\infty)$$

七【详解】 由 $f'(x) = g(x), g'(x) = 2e^x - f(x)$, 得 $f''(x) = g'(x) = 2e^x - f(x)$, 即

$$f''(x) + f(x) = 2e^x$$

此为二阶常系数线性非齐次方程, 且右端呈 $P_m(x)e^{\lambda x}$ 型(其中 $P_m(x) = 2, \lambda = 1$),

对应的齐次方程为 $f''(x) + f(x) = 0$, 特征方程为 $r^2 + 1 = 0$, 对应的特征值为 $r = \pm i$,

于是齐次方程的通解为: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$,

因为 $\lambda = 1 \neq r$, 所以设特解为 $y^* = ae^x$ (a 为实数), $(y^*)'' = ae^x$,

代入 $f''(x) + f(x) = 2e^x$, $ae^x + ae^x = 2e^x$, 所以 $a + a = 2$, 即 $a = 1$, 从而特解 $y^* = e^x$,

非齐次方程的通解为 $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^x$,

又 $f(0) = 0$, 所以, $f(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + e^0 = 0 \Rightarrow C_1 + 1 = 0 \Rightarrow C_1 = -1$

又, $f'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + e^x$, $f'(0) = g(0) = 2$,

所以, $f'(0) = -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 + e^0 = C_2 + 1 = 2 \Rightarrow C_2 = 1$,

所以原方程的解为: $f(x) = \sin x - \cos x + e^x$

以下计算积分, 有两个方法:

$$\text{方法 1: } \int_0^\pi \left[\frac{g(x)}{1+x} - \frac{f(x)}{(1+x)^2} \right] dx = \int_0^\pi \frac{g(x)(1+x) - f(x)}{(1+x)^2} dx$$

$$\underline{\underline{f'(x) = g(x) \int_0^\pi \frac{f'(x)(1+x) - f(x)}{(1+x)^2} dx = \int_0^\pi \left[\frac{f(x)}{1+x} \right]' dx = \int_0^\pi d \frac{f(x)}{1+x}}}$$

$$= \frac{f(x)}{1+x} \Big|_0^\pi = \frac{f(\pi)}{1+\pi} - \frac{f(0)}{1+0} = \frac{\sin \pi - \cos \pi + e^\pi}{1+\pi} - f(0) = \frac{1+e^\pi}{1+\pi}$$

方法 2: $\int_0^\pi \left[\frac{g(x)}{1+x} - \frac{f(x)}{(1+x)^2} \right] dx = \int_0^\pi \frac{g(x)}{1+x} dx - \int_0^\pi \frac{f(x)}{(1+x)^2} dx$

$$= \int_0^\pi \frac{g(x)}{1+x} dx + \int_0^\pi f(x) \left(\frac{1}{1+x} \right)' dx = \int_0^\pi \frac{g(x)}{1+x} dx + \int_0^\pi f(x) d \frac{1}{1+x}$$

$$\underline{\underline{\text{分部}}} \int_0^\pi \frac{g(x)}{1+x} dx + \frac{f(x)}{1+x} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{f'(x)}{1+x} dx$$

$$\underline{\underline{g(x) = f'(x) \int_0^\pi \frac{g(x)}{1+x} dx + \frac{f(x)}{1+x} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{g(x)}{1+x} dx}}$$

$$= \frac{f(x)}{1+x} \Big|_0^\pi = \frac{f(\pi)}{1+\pi} - \frac{f(0)}{1+0} = \frac{\sin \pi - \cos \pi + e^\pi}{1+\pi} - f(0) = \frac{1+e^\pi}{1+\pi}$$

八 【详解】 (1) 设曲线 L 过点 $P(x, y)$ 的切线方程为 $Y - y = y'(X - x)$ ，令 $X = 0$ ，则

$Y = -xy' + y$ ，即它在 y 轴上的截距为 $-xy' + y$ ，

根据两点 $(x, y), (x_0, y_0)$ 距离公式 $d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ ，所以原点到点 $P(x, y)$ 的距离为 $\sqrt{x^2 + y^2}$ ，由题设 $P(x, y)$ ($x > 0$) 到坐标原点的距离恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距，所以： $-xy' + y = \sqrt{x^2 + y^2}$ ， ($x > 0$)，

即
$$y' = \frac{y}{x} - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}, \quad (x > 0)$$

此为一阶齐次方程，按规范方法解之，命 $y = ux$ ，则 $\frac{dy}{dx} = u + xdu$ ，代入，方程变为：

$$u + x \frac{du}{dx} = u - \frac{x\sqrt{u^2 + 1}}{x} \Rightarrow x \frac{du}{dx} = -\sqrt{u^2 + 1} \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = -\frac{dx}{x}$$

积分得
$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = -\ln cx \Rightarrow u + \sqrt{1 + u^2} = \frac{C}{x}$$

把 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式, 得

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{C}{x} \Rightarrow y + \sqrt{x^2 + y^2} = C.$$

由题设曲线经过点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, 代入得 $0 + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0} = C$, 则 $C = \frac{1}{2}$, 故所求方程为:

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } y = \frac{1}{4} - x^2.$$

(2) 由(1)知 $y = \frac{1}{4} - x^2$, 则 $y' = -2x$, 点 $P(x, y) = P\left(x, \frac{1}{4} - x^2\right)$, 所以在点 P 处的切

线方程为: $Y - \left(\frac{1}{4} - x^2\right) = -2x(X - x)$, 分别令 $X = 0$, $Y = 0$, 解得在 y 轴, x 轴上的

截距分别为 $x^2 + \frac{1}{4}$ 和 $\frac{x}{2} + \frac{1}{8x}$.

此切线与两坐标轴围成的三角形面积为:

$$A(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{8x} \right) \left(x^2 + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{64x} (4x^2 + 1)^2, \quad x > 0$$

由于该曲线在第一象限中与两坐标轴所围成的面积为定值, 记 S_0 , 于是题中所要求的

面积为: $S(x) = A(x) - S_0 = \frac{1}{64x} (4x^2 + 1)^2 - S_0$,

求最值点时与 S_0 无关, 以下按微分学的办法求最值点.

$$\begin{aligned} S'(x) &= \left(\frac{1}{64x} (4x^2 + 1)^2 - S_0 \right)' = \frac{2 \cdot 8x(4x^2 + 1) - (4x^2 + 1)^2}{64x^2} \\ &= \frac{2 \cdot 8x(4x^2 + 1)x - (4x^2 + 1)^2}{64x^2} = \frac{(4x^2 + 1)(12x^2 - 1)}{64x^2} \end{aligned}$$

令 $S'(x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, 当 $0 < x < \frac{\sqrt{3}}{6}$ 时, $S'(x) < 0$; 当 $x > \frac{\sqrt{3}}{6}$ 时, $S'(x) > 0$,

根据极值存在的第一充分条件: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 且在 x_0 的某去心 δ 领域内可导, 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$, 而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0

处取得极大值, 知: $x = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 是 $S(x)$ 在 $x > 0$ 处的唯一极小值点, 即最小值点,

于是所求切线方程为:

$$Y - \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2 \right) = -\frac{2\sqrt{3}}{6} \left(X - \frac{\sqrt{3}}{6} \right), \text{ 即 } Y = -\frac{\sqrt{3}}{3}X + \frac{1}{3}$$

九【详解】

方法 1: 半球形雪堆在时刻 t 时设其半径为 r , 则半球体积 $V = \frac{2}{3}\pi r^3$, 侧面积 $S = 2\pi r^2$. 由

题设体积融化的速率与半球面面积 S 成正比, 知: $\frac{dV}{dt} = -kS$,

由于 r 是 t 的函数, $\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{3}\pi r^3 \right) = 2\pi r^2 \frac{dr}{dt}$, 代入上式, 得: $2\pi r^2 \frac{dr}{dt} = -kS$,

即 $2\pi r^2 \frac{dr}{dt} = -k \cdot 2\pi r^2$, 从而 $dr = -kdt$, $r|_{t=0} = r_0$.

积分得 $r = -kt + c$, 把 $r|_{t=0} = r_0$ 代入, 得 $c = r_0$, 所以 $r = -kt + r_0$.

又半径为 r_0 的雪堆在开始融化的 3 小时内, 融化了其体积的 $\frac{7}{8}$, 即

$V|_{t=3} = V_0 - \frac{7}{8}V_0 = \frac{1}{8}V_0$, 其中 V_0 表示 $t=0$ 时的 V . 以 V 的公式代入上式, 为

$$V|_{t=3} = \frac{2}{3}\pi r^3 \Big|_{t=3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}\pi r^3 \Big|_{t=0}$$

将 $r = -kt + r_0$ 代入上式, 两边约去 $\frac{2}{3}\pi$, 得:

$$(-kt + r_0)^3 = \frac{1}{8}r_0^3, \text{ 即 } -kt + r_0 = \frac{1}{2}r_0$$

从而求得: $k = \frac{1}{6}r_0$, 于是 $r = -kt + r_0 = -\frac{1}{6}r_0 t + r_0 = r_0 \left(1 - \frac{t}{6} \right)$, 当 $t=6$ 时 $r=0$, 雪

融化完.

方法 2: 半球形雪堆在时刻 t 时设其半径为 r , 则半球体积 $V = \frac{2}{3}\pi r^3$, 侧面积 $S = 2\pi r^2$,

联立 $V = \frac{2}{3}\pi r^3$, $S = 2\pi r^2$ 消去 r , 得: $S = \sqrt[3]{18\pi V^2}$

由题设体积融化的速率与半球面面积 S 成正比, 知: $\frac{dV}{dt} = -kS$, 从而推知

$$\frac{dV}{dt} = -k\sqrt[3]{18\pi V^2}, V|_{t=0} = V_0$$

分离变量 $\frac{dV}{V^{\frac{5}{3}}} = -k\sqrt[3]{18\pi} dt$, 积分: $3V^{\frac{1}{3}} = -k\sqrt[3]{18\pi}t + c$, 把 $V|_{t=0} = V_0$ 代入,

$c = 3V_0^{\frac{1}{3}}$, 所以, $3V^{\frac{1}{3}} = 3V_0^{\frac{1}{3}} - k\sqrt[3]{18\pi t}$.

又由 $V|_{t=3} = V_0 - \frac{7}{8}V_0 = \frac{1}{8}V_0$, 代入上式 $\frac{3}{2}V_0^{\frac{1}{3}} = 3V_0^{\frac{1}{3}} - 3k\sqrt[3]{18\pi}$, 得 $k = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{V_0}{18\pi}}$,

故 $3V^{\frac{1}{3}} = 3V_0^{\frac{1}{3}} - k\sqrt[3]{18\pi t} = 3V_0^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{V_0}{18\pi}}\sqrt[3]{18\pi t} = 3V_0^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}V_0^{\frac{1}{3}}t$.

令 $V = 0$, 解得: $t = 6$, 即雪堆全部融化需 6 小时.

十【应用定理】闭区间上连续函数的介值定理: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(a) \neq f(b)$,

则对 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何数 η , 必存在 $c (a < c < b)$, 使得 $f(c) = \eta$.

【详解】(1) 麦克劳林公式其实就是泰勒公式中, 把函数在零点展开.

$f(x)$ 的拉格朗日余项一阶麦克劳林公式为:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2 = f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2,$$

其中 ξ 位于 0 和 x 为端点的开区间内, $x \in [-a, a]$.

(2) 方法 1: 将 $f(x)$ 从 $-a$ 到 a 积分 $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^a f'(0)x dx + \frac{1}{2}\int_{-a}^a f''(\xi)x^2 dx$.

而 $\int_{-a}^a f'(0)x dx = f'(0)\int_{-a}^a x dx = f'(0) \times \frac{x^2}{2} \Big|_{-a}^a = 0$

从而有 $\int_{-a}^a f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^a f''(\xi)x^2 dx$.

因 $f''(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续, 故有 $f''(x)$ 在 $[-a, a]$ 上存在最大值 M , 最小值 m (由闭区间上的连续函数必有最大值和最小值), 即

$$m = \min_{[-a, a]} f''(x), M = \max_{[-a, a]} f''(x),$$

易得 $m \leq f''(x) \leq M, x \in [-a, a]$.

因此 $\int_{-a}^a f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^a f''(\xi)x^2 dx \leq \frac{1}{2}M \int_{-a}^a x^2 dx = \frac{1}{2}M \frac{x^3}{3} \Big|_{-a}^a = \frac{Ma^3}{3}$,

同理 $\int_{-a}^a f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^a f''(\xi)x^2 dx \geq \frac{1}{2}m \int_{-a}^a x^2 dx = \frac{1}{2}ma^3$.

因此 $m \leq \frac{3}{a^3} \int_{-a}^a f(x)dx \leq M$.

由连续函数介值定理知, 存在 $\eta \in [-a, a]$, 使

$$f''(\eta) = \frac{3}{a^3} \int_{-a}^a f(x) dx, \text{ 即 } a^3 f''(\eta) = 3 \int_{-a}^a f(x) dx.$$

方法 2 : 观察要证的式子, 做变限函数: $F(x) = \int_{-x}^x f(t) dt$, 易得 $F(0) = 0$,

$$F'(x) = f(x) + f(-x) \text{ (变限积分求导)}$$

$$F''(x) = (f(x) + f(-x))' = f'(x) - f'(-x)$$

$$F'''(x) = (f'(x) - f'(-x))' = f''(x) + f''(-x)$$

则有 $F'(0) = f(0) + f(-0) = 0 + 0 = 0$

$$F''(0) = f'(0) - f'(-0) = f'(0) - f'(0) = 0$$

将它展开成 2 阶带拉格朗日余项麦克劳林公式:

$$\begin{aligned} F(x) &= F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2}F''(0)x^2 + \frac{1}{3!}F'''(\xi)x^3 \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{6}F'''(\xi)x^3 = \frac{1}{6}(f''(\xi) + f''(-\xi))x^3 \end{aligned}$$

其中 $\xi \in (0, x)$, $x \in [-a, a]$

由于 $f''(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续, 则由连续函数介值定理, 存在 $\eta \in [-\xi, \xi]$, 使

$$f''(\eta) = \frac{1}{2}(f''(\xi) + f''(-\xi)) \quad (\text{因为 } \frac{1}{2}(f''(\xi) + f''(-\xi)) \in f''(x), x \in [-a, a])$$

于是有, 存在 $\eta \in (-a, a)$, 使

$$F(x) = 0 + 0 + \frac{1}{6}F'''(\xi)x^3 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}(f''(\xi) + f''(-\xi))x^3 = \frac{1}{3}f''(\eta)x^3$$

把 $x = a$ 代入 $F(x)$ 有:

$$F(a) = \frac{1}{3}f''(\eta)a^3, \text{ 即 } \int_{-a}^a f(x) dx = \frac{a^3}{3}f''(\eta) \quad \eta \in (-a, a)$$

$$\text{即 } a^3 f''(\eta) = 3 \int_{-a}^a f(x) dx \quad \eta \in (-a, a)$$

十一 【详解】 题设的关系式

$$AXA + BXB = AXB + BXA + E \Rightarrow AXA + BXB - AXB - BXA = E$$

$$\Rightarrow (AXA - AXB) + (BXB - BXA) = E \Rightarrow AX(A - B) + BX(B - A) = E$$

$$\Rightarrow AX(A - B) - BX(A - B) = E \Rightarrow (AX - BX)(A - B) = E$$

即 $(A-B)X(A-B)=E.$

其中, $A-B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

因为 $|A-B|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0,$

故由 n 阶矩阵 A 可逆的充要条件 $|A|\neq 0$, 知矩阵 $A-B$ 可逆, 用初等行变换求 $(A-B)^{-1}$:

$$(A-E, E)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{3\text{行分别} \\ \text{加到1, 2行}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\text{行加到1行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故而 $(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

于是, 等式 $(A-B)X(A-B)=E$ 两边左、右乘 $(A-B)^{-1}$ 可得

$$X=\left[(A-B)^{-1}\right]^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

十二【详解】由题设知, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 均为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合, 齐次方程组当有非零解时, 解向量的任意组合仍是该齐次方程组的解向量, 所以 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 均为 $Ax=0$ 的解.

下面证明 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关. 设

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\dots+k_s\beta_s=0 \quad (*)$$

把 $\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2, \beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3, \dots, \beta_s=t_1\alpha_s+t_2\alpha_1$, 代入整理得,

$$(t_1k_1+t_2k_s)\alpha_1+(t_2k_1+t_1k_2)\alpha_2+\dots+(t_2k_{s-1}+t_1k_s)\alpha_s=0$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 知 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 由线性无关的定义, 知 (*) 中其系数全为零, 即

$$\begin{cases} t_1 k_1 + t_2 k_s = 0 \\ t_2 k_1 + t_1 k_2 = 0 \\ \vdots \\ t_2 k_{s-1} + t_1 k_s = 0 \end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 & t_2 \\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(*)} \begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 & t_2 \\ 0 & t_1 & 0 & \cdots & -\frac{t_2^2}{t_1} \\ 0 & 0 & t_1 & \cdots & \frac{t_2^3}{t_1^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 + (-1)^{s+1} \frac{t_2^s}{t_1^{s-1}} \end{vmatrix} = t_1^{s-1} \left(t_1 + (-1)^{s+1} \frac{t_2^s}{t_1^{s-1}} \right) = t_1^s + (-1)^{s+1} t_2^s$$

(*) 变换: 把原行列式第 i 行乘以 $-\frac{t_2}{t_1}$ 加到第 $i+1$ 行, 其中 $i=1, \dots, s-1$.)

由齐次线性方程组只有零解得充要条件, 可见, 当 $t_1^s + (-1)t_2^s \neq 0$, 即 $t_1^s \neq (-t_2)^s$, 即

当 s 为偶数, $t_1 \neq \pm t_2$; 当 s 为奇数, $t_1 \neq t_2$ 时, 上述方程组只有零解 $k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0$, 因

此向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关,

故当 $\begin{cases} s=2n, & t_1 \neq \pm t_2 \\ s=2n+1, & t_1 \neq t_2 \end{cases}$ 时, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 也是方程组 $Ax = 0$ 的基础解系.