

2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题

(1) 【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【详解】 $I = \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2} dx$

解法 1: 用换元积分法: 设 $x-1 = \sin t$, 当 $x=0$ 时, $\sin t = -1$, 所以下限取 $-\frac{\pi}{2}$; 当 $x=1$ 时, $\sin t = 0$, 所以上限取 0 .

$$\text{所以 } I \stackrel{x-1=\sin t}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 |\cos t| \cos t dt$$

$$\text{由于在区间 } [-\frac{\pi}{2}, 0], \text{ 函数 } \cos t \text{ 非负, 则 } I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t = \frac{\pi}{4}$$

解法 2: 由于曲线 $y = \sqrt{2x-x^2} = \sqrt{1-(x-1)^2}$ 是以点 $(1, 0)$ 为圆心, 以 1 为半径的上半圆周, 它与直线 $x=1$ 和 $y=0$ 所围图形的面积为圆面积的 $\frac{1}{4}$, 故答案是 $\frac{\pi}{4}$

(2) 【答案】 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-2}{6}$.

【详解】 曲面方程 $F(x, y, z) = 0$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的法矢量为:

$$\vec{n} = \{F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)\}$$

令 $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21$, 则有

$$F_x'(1, -2, 2) = 2x|_{(1, -2, 2)} = 2,$$

$$F_y'(1, -2, 2) = 4y|_{(1, -2, 2)} = -8,$$

$$F_z'(1, -2, 2) = 6z|_{(1, -2, 2)} = 12.$$

所以曲面在点 $(1, -2, 2)$ 处的法线方程为: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-8} = \frac{z-2}{12}$. 即 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-2}{6}$.

(3) 【答案】 $y = \frac{C_1}{x^2} + C_2$

【分析】 此方程为二阶可降阶的微分方程, 属于 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程.

【详解】 令 $p = y'$, 有 $y'' = \frac{dp}{dx}$. 原方程化为: $x \frac{dp}{dx} + 3p = 0$, $\Rightarrow \frac{dp}{dx} + 3 \frac{p}{x} = 0$

分离变量: $\frac{dp}{p} = -3\frac{dx}{x}$

两端积分: $\int \frac{dp}{p} = -3 \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|p| = -3\ln|x| + C_1$

从而 $|p| = e^{-3\ln|x|+C_1} = e^{C_1} e^{-3\ln|x|} = e^{C_1} |x|^{-3} = e^{C_1} \frac{1}{|x|^3}$

因记 $C_2 = e^{C_1} > 0$ 是大于零的任意常数, 上式可写成 $p = \pm \frac{C_2}{x^3}$;

记 $C_3 = \pm C_2$, $p = \frac{C_3}{x^3}$, 便得方程的通解 $p = C_3 x^{-3}$,

即 $\frac{dy}{dx} = C_3 x^{-3} \Rightarrow dy = C_3 x^{-3} dx$, 其中 C_3 是任意常数

对上式再积分, 得:

$$y = \int C_3 x^{-3} dx = -\frac{C_3}{2} x^{-2} + C_4 = \frac{C_5}{x^2} + C_4, \left(C_5 = -\frac{C_3}{2} \right)$$

所以原方程的通解为:

$$y = \frac{C_1}{x^2} + C_2$$

(4) 【答案】 -1.

【详解】化增广矩阵为阶梯形, 有

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & \vdots & 3 \\ 1 & a & -2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & a & \vdots & 1 \\ 0 & a-2 & -3 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & a & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & \vdots & a-3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

当 $a = -1$ 时, 系数矩阵的秩为 2, 而增广矩阵的秩为 3, 根据方程组解的判定, 其系数矩阵与增广矩阵的秩不同, 因此方程组无解.

当 $a = 3$ 时, 系数矩阵和增光矩阵的秩均为 2, 由方程组解的判定, 系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩, 而且小于未知量的个数, 所以方程组有无穷多解.

(5) 【答案】 $2/3$ (由 A, B 独立的定义: $P(AB) = P(A)P(B)$)

【详解】由题设, 有 $P(\overline{AB}) = \frac{1}{9}$, $P(A\overline{B}) = P(\overline{AB})$

因为 A 和 B 相互独立, 所以 A 与 $\overline{B}$, $\overline{A}$ 与 B 也相互独立.

于是由 $P(\overline{AB}) = P(\overline{A}B)$, 有 $P(A)P(\overline{B}) = P(\overline{A})P(B)$

即有 $P(A)[1 - P(B)] = [1 - P(A)]P(B)$,

可得 $P(A) = P(B)$, $P(\overline{A}) = P(\overline{B})$

从而 $P(\overline{AB}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = [P(\overline{A})]^2 = [1 - P(A)]^2 = \frac{1}{9}$,

解得 $P(A) = \frac{2}{3}$.

二、选择题

(1) 【答案】A

【分析】由选项答案可知需要利用单调性证明, 关键在于寻找待证的函数. 题设中已知

$f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$, 想到设函数为相除的形式 $\frac{f(x)}{g(x)}$.

【详解】

设 $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, 则 $(F(x))' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} < 0$,

则 $F(x)$ 在 $a < x < b$ 时单调递减, 所以对 $\forall a < x < b$, $F(a) > F(x) > F(b)$, 即

$$\frac{f(a)}{g(a)} > \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f(b)}{g(b)}$$

得 $f(x)g(b) > f(b)g(x)$, $a < x < b$, (A) 为正确选项.

(2) 【答案】C

【性质】第一类曲面积分关于奇偶性和对称性的性质有:

性质 1: 设 $f(x, y, z)$ 在分块光滑曲面 S 上连续, S 关于 $yo z$ 平面对称, 则

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \begin{cases} 0 & \text{若 } f(x, y, z) \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数} \\ 2 \iint_{S_1} f(x, y, z) dS & \text{若 } f(x, y, z) \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数} \end{cases}$$

其中 $S_1 = S \cap \{x \geq 0\}$.

性质 2: 设 $f(x, y, z)$ 在分块光滑曲面 S 上连续, S 关于 xoz 平面对称, 则

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \begin{cases} 0 & \text{若 } f(x, y, z) \text{ 关于 } y \text{ 为奇函数} \\ 2 \iint_{S_1} f(x, y, z) dS & \text{若 } f(x, y, z) \text{ 关于 } y \text{ 为偶函数} \end{cases}$$

其中 $S_1 = S \cap \{y \geq 0\}$.

性质 3: 设 $f(x, y, z)$ 在分块光滑曲面 S 上连续, S 关于 xOy 平面对称, 则

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \begin{cases} 0 & \text{若 } f(x, y, z) \text{ 关于 } z \text{ 为奇函数} \\ 2 \iint_{S_1} f(x, y, z) dS & \text{若 } f(x, y, z) \text{ 关于 } z \text{ 为偶函数} \end{cases}$$

其中 $S_1 = S \cap \{z \geq 0\}$.

【详解】

方法 1: 直接法:

本题中 S 在 xOy 平面上方, 关于 yOz 平面和 xOz 平面均对称, 而 $f(x, y, z) = z$ 对 x, y 均为偶函数, 则

$$\iint_S z dS \stackrel{\text{性质1}}{=} 2 \iint_{S \cap \{x \geq 0\}} z dS \stackrel{\text{性质2}}{=} 4 \iint_{S_1} z dS$$

又因为在 S_1 上将 x 换为 y , y 换为 z , z 换为 x , S_1 不变(称积分区域 S_1 关于 x, y, z 轮换对称), 从而将被积函数也作此轮换变换后, 其积分的值不变, 即有

$$4 \iint_{S_1} z dS = 4 \iint_{S_1} x dS = 4 \iint_{S_1} y dS. \text{ 选项 (C) 正确.}$$

方法 2: 间接法(排除法)

曲面 S 关于 yOz 平面对称, x 为 x 的奇函数, 所以 $\iint_S x dS = 0$, 而 $\iint_{S_1} x dS$ 中 $x \geq 0$ 且仅在 yOz 面上 $x = 0$, 从而 $\iint_{S_1} x dS > 0$, (A) 不成立.

曲面 S 关于 zOx 平面对称, y 为 y 的奇函数, 所以 $\iint_S y dS = 0$, 而 $\iint_{S_1} y dS > 0$, 所以 (B) 不成立.

曲面 S 关于 zOx 平面对称, xyz 为 y 的奇函数, 所以 $\iint_S xyz dS = 0$, 而 $\iint_{S_1} xyz dS > 0$, 所以 (D) 不成立.

(3) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则必收敛的级数为 ()

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$.

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$.

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n+1})$.

【答案】 D

【详解】

方法 1: 直接法. 由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$ 也收敛. 由收敛级数的性质 (如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 、

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 s 、 σ , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛, 且其和为 $s \pm \sigma$). 知

$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$. 选项 (D) 成立.

方法 2: 间接法. 找反例:

(A): 取 $u_n = (-1)^n \frac{1}{\ln(1+n)}$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln(1+n)}$

是发散的; (关于上述结论的收敛, 有下述结果:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^p(1+n)} \begin{cases} \text{收敛} & \text{当 } p > 1 \\ \text{发散} & \text{当 } p \leq 1 \end{cases}$$

(B): 取 $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散;

(C): 取 $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 但

$$u_{2n-1} - u_{2n} = \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} = \frac{4n-1}{2n(2n-1)} \sim \frac{1}{n}$$

由比较审敛法的极限形式知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 发散.

(4) 【答案】(D)

【详解】用排除法.

(A) 为充分但非必要条件: 若向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1, \dots, \beta_m$ 线性表示, 则一定可推导 $\beta_1, \dots, \beta_m$ 线性无关, 因为若 $\beta_1, \dots, \beta_m$ 线性相关, 则 $r(\alpha_1, \dots, \alpha_m) < m$, 于是 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 必线性相关, 矛盾. 但反过来不成立, 如当 $m=1$ 时, $\alpha_1 = (1, 0)^T, \beta_1 = (0, 1)^T$ 均为单个非零向量是线性相关的, 但 α_1 并不能用 β_1 线性表示.

(B) 为既非充分又非必要条件: 如当 $m=1$ 时, 考虑 $\alpha_1 = (1, 0)^T, \beta_1 = (0, 1)^T$ 均线性无关, 但不能由 α_1 线性表示, 必要性不成立; 又如 $\alpha_1 = (1, 0)^T, \beta_1 = (0, 0)^T$, 可由 α_1 线性表示,

但 β_1 并不线性无关, 充分性也不成立.

(C) 为充分但非必要条件: 若向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 与向量组 $\beta_1, \dots, \beta_m$ 等价, 由 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关知, $r(\beta_1, \dots, \beta_m) = r(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = m$, 因此 $\beta_1, \dots, \beta_m$ 线性无关, 充分性成立; 当 $m = 1$ 时, 考虑 $\alpha_1 = (1, 0)^T, \beta_1 = (0, 1)^T$ 均线性无关, 但 α_1 与 β_1 并不是等价的, 必要性不成立.

(D) 剩下(D)为正确选项. 事实上, 矩阵 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ 与矩阵 $B = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ 等价 $\Leftrightarrow r(A) = r(B) \Leftrightarrow r(\beta_1, \dots, \beta_m) = r(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = m$, 因此是向量组 $\beta_1, \dots, \beta_m$ 线性无关的充要条件.

(5) 【答案】B.

【详解】 ξ 和 η 不相关的充分必要条件是它们的相关系数

$$\rho_{\xi\eta} = \frac{\text{Cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D(\xi)} \cdot \sqrt{D(\eta)}} = 0 \Leftrightarrow \text{Cov}(\xi, \eta) = 0$$

由协方差的性质: $\text{cov}(aX + bY, Z) = a \text{cov}(X, Z) + b \text{cov}(Y, Z)$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad \text{Cov}(\xi, \eta) &= \text{Cov}(X + Y, X - Y) \\ &= \text{Cov}(X, X) - \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Y, X) - \text{Cov}(Y, Y) \\ &= \text{Cov}(X, X) - \text{Cov}(Y, Y) = D(X) - D(Y) \end{aligned}$$

$$\text{可见} \quad \text{Cov}(\xi, \eta) = 0 \Leftrightarrow D(X) - D(Y) = 0 \Leftrightarrow D(X) = D(Y)$$

$$\Leftrightarrow E(X^2) - [E(X)]^2 = E(Y^2) - [E(Y)]^2 \quad (\text{由方差定义 } DX = EX^2 - (EX)^2)$$

故正确选项为(B).

三 【分析】由于极限中含有 $e^{\frac{1}{x}}$ 与 $|x|$, 故应分别求其左极限与右极限, 若左极限与右极限相等, 则极限值存在且等于其极限值, 否则极限不存在.

【详解】

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} - \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{2}{1} - 1 = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{x} \right) = 0+1=1;$$

左极限与右极限相等, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = 1.$$

四【详解】 根据复合函数的求导公式, 有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot y + f_2' \cdot \frac{1}{y} + g' \cdot \left(-\frac{y}{x^2} \right)$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \left[f_{11}''x + f_{12}'' \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) \right] y + f_1' + \left[f_{21}''x + f_{22}'' \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) \right] \frac{1}{y} \\ &\quad + f_2' \cdot \left(-\frac{1}{y^2} \right) + g'' \cdot \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{y}{x^2} \right) + g'' \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= f_1' - \frac{1}{y^2} f_2' + xy f_{11}'' - \frac{x}{y^3} f_{22}'' - \frac{1}{x^2} g' - \frac{y}{x^3} g'' \end{aligned}$$

五【详解】

方法 1: (复连通条件下的封闭曲线积分)

设: (1) L_1 与 L_2 是两条分段光滑的简单封闭曲线, 具有相同的走向, (2) 在 L_1 与 L_2 所包围的有界闭区域 D_1 与 D_2 的内部除一些点外, $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 连续并具有连续的一阶偏导数, 且 $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$. 则

$$\oint_{L_1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \oint_{L_2} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

解: 以点 $(1, 0)$ 为中心, R 为半径的圆周的参数方程是: $x = 1 + R \cos \theta, y = R \sin \theta$, 逆时针方向一周为从 $t = 0$ 到 $t = 2\pi$, 代入曲线积分

$$I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$$

由于分母很繁, 计算不方便. 由曲线封闭, 可以考虑使用格林公式, 但在 L 所包围的区域内部有点 $O(0, 0)$, 该点处分母为 0, 导致被积函数不连续, 格林公式不能用.

$$\text{记 } P = \frac{-y}{4x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{4x^2 + y^2}, \text{ 且 } P(x, y) \text{ 与 } Q(x, y) \text{ 满足 } \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial y},$$

$(x, y) \neq (0, 0)$. 作足够小的椭圆:

$$L_1: \varepsilon \begin{cases} x = \frac{\varepsilon}{2} \cos t \\ y = \varepsilon \sin t \end{cases} (t \in [0, 2\pi], C \text{ 取逆时针方向}),$$

于是 L 与 L_1 及函数 $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 满足“分析”中所述定理的一切条件, 于是

$$I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} = \oint_{L_1} \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$$

而后一积分可用参数法计算

$$I = \oint_{L_1} \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\varepsilon}{2} \cos t \cdot \varepsilon \cos t - \varepsilon \sin t \cdot \frac{\varepsilon}{2} (-\sin t)}{\varepsilon^2} dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2} dt = \pi$$

方法2: 记 $P = \frac{-y}{4x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{4x^2 + y^2}$, 则 $\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$, $(x, y) \neq (0, 0)$. 在 L 内加 L_1 :

椭圆 $4x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ 的顺时针方向, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_{L+L_1} \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} - \int_{L_1} \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} \\ &= \iint_D 0 dx dy - \int_{L_1} \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} \quad (D \text{ 由 } L \text{ 与 } L_1 \text{ 所围}) \\ &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{L_1} xdy - ydx = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{D_1} 2 dx dy \quad (D_1: 4x^2 + y^2 \leq \varepsilon^2) \\ &= \frac{2}{\varepsilon^2} \cdot \pi \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \varepsilon = \pi \end{aligned}$$

六【详解】 由题设条件, 可以用高斯公式:

$$\begin{aligned} 0 &= \oiint_S xf(x) dy dz - xyf(x) dz dx - e^{2x} z dx dy \\ &= \pm \iiint_{\Omega} [xf'(x) + f(x) - xf(x) - e^{2x}] dv \end{aligned}$$

其中 Ω 为 S 所围成的有界闭区域, 当 S 的法向量指向 Ω 外时, “ $\pm$ ”中取“+”; 当 S 的法向量指向 Ω 内时, “ $\pm$ ”中取“-”. 由 S 的任意性, 知被积函数应为恒等于零的函数

即 $xf'(x) + f(x) - xf(x) - e^{2x} = 0, (x > 0)$

变形后得 $f'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right)f(x) = \frac{1}{x}e^{2x}, (x > 0)$

这是一阶线性非齐次微分方程,

利用一阶线性非齐次微分方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 的通解公式:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$$

其通解为

$$f(x) = e^{\int (1-\frac{1}{x})dx} \left[\int \frac{1}{x} e^{2x} \cdot e^{\int (\frac{1}{x}-1)dx} dx + C \right] = \frac{e^x}{x} \left[\int \frac{1}{x} e^{2x} \cdot x e^{-x} dx + C \right] = \frac{e^x}{x} (e^x + C)$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{2x} + C e^x}{x} \right) = 1$, 故必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{2x} + C e^x) = 0$, (否则不能满足极

限值为1), 即 $C + 1 = 0$, 从而 $C = -1$.

因此
$$f(x) = \frac{e^x}{x} (e^x - 1).$$

七【定义概念】幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$, 其中 a_n, a_{n+1} 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的相邻

两项的系数, 则该幂级数的收敛半径

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho} & \rho \neq 0 \\ +\infty & \rho = 0 \\ 0 & \rho = +\infty \end{cases}$$

开区间 $(-R, R)$ 叫做幂级数的收敛区间.

【详解】

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[3^n + (-2)^n]n}{[3^{n+1} + (-2)^{n+1}](n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[1 + \left(\frac{-2}{3}\right)^n\right]n}{3\left[1 + \left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1}\right](n+1)} = \frac{1}{3}$$

所以收敛半径为 $R = 3$, 相应的收敛区间为 $(-3, 3)$.

当 $x=3$ 时, 因为

$$\frac{3^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{1 + \left(\frac{-2}{3}\right)^n} \cdot \frac{1}{n} > \frac{1}{2n}$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 由比较审敛法的极限形式, 所以原级数在点 $x=3$ 处发散;

当 $x=-3$ 时, 由于

$$\frac{(-3)^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n} = \left(\frac{(-3)^n + 2^n}{3^n + (-2)^n} - \frac{2^n}{3^n + (-2)^n} \right) \cdot \frac{1}{n} = (-1)^n \frac{1}{n} - \frac{(2)^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n},$$

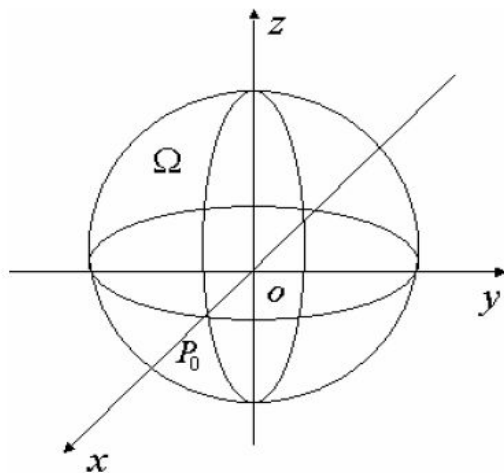
分别考虑两个级数, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 是收敛的. 又因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \left(-\frac{2}{3} \right)^n \right] = \infty$, 从而

$$\frac{2^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^n}{1 + \left(-\frac{2}{3} \right)^n} \cdot \frac{1}{n} < \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

再由 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n$ 收敛, 根据比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2)^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n} \right)$ 收敛. 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-3)^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n} \right)$

收敛, 所以原级数在点 $x=-3$ 处收敛. 所以收敛域为 $[-3, 3)$.

八【详解】本题为一物理应用题, 由于重心坐标是相对某一些坐标系而言的, 因此本题的关键是建立适当的坐标系, 一般来说, 可考虑选取球心或固定点 P_0 作为坐标原点, 相应的有两种求解方法.



方法1: 记所考虑的球体为 Ω , 以 Ω 的球心为坐标原点 O , 射线 OP_0 为正 x 轴建立直角坐标系,

则球面方程为: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 点 P_0 的坐标为 $(R, 0, 0)$, 设 Ω 的重心位置为

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 由对称性, 得 $\bar{y}=0, \bar{z}=0$, 设 μ 为 Ω 上点 (x, y, z) 处的密度, 按题设

$\mu = k[(x-R)^2 + y^2 + z^2]$, 则

$$\bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x \mu dV}{\iiint_{\Omega} \mu dV} = \frac{\iiint_{\Omega} x \cdot k[(x-R)^2 + y^2 + z^2] dV}{\iiint_{\Omega} k[(x-R)^2 + y^2 + z^2] dV}$$

而

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} k[(x-R)^2 + y^2 + z^2] dV \\ &= \iiint_{\Omega} k(x^2 + y^2 + z^2 + R^2) dV - 2kR \iiint_{\Omega} z dV \\ &= k \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV + k \iiint_{\Omega} R^2 dV - 0 \quad (\text{利用奇函数的对称性}) \\ &= 8k \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr + \frac{4k}{3} \pi R^5 \end{aligned}$$

(利用奇偶函数的对称性轮换对称性+球体体积公式)

$$\begin{aligned} &= 8k \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^R r^4 dr + \frac{4k}{3} \pi R^5 \\ &= 8k \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \cdot \left(\frac{r^5}{5} \right) \Big|_0^R + \frac{4k}{3} \pi R^5 \quad (\text{牛-莱公式}) \\ &= 8k \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \cdot \frac{R^5}{5} + \frac{4k}{3} \pi R^5 \\ &= \frac{4k\pi R^5}{5} (-\cos \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4k}{3} \pi R^5 \quad (\text{牛-莱公式}) \\ &= \frac{4k\pi R^5}{5} + \frac{4k}{3} \pi R^5 = \frac{32k\pi R^5}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} kx[(x-R)^2 + y^2 + z^2] dV \\ &= k \iiint_{\Omega} x(x^2 + y^2 + z^2 + R^2) dV - 2kR \iiint_{\Omega} x^2 dV \end{aligned}$$

其中第一个积分的被积函数为 z 的奇函数, Ω 对称于 xOy 平面, 所以该积分值为零,

又由于 Ω 关于 x, y, z 轮换对称, 所以 $\iiint_{\Omega} z^2 dV = \iiint_{\Omega} x^2 dV = \iiint_{\Omega} y^2 dV$

从而

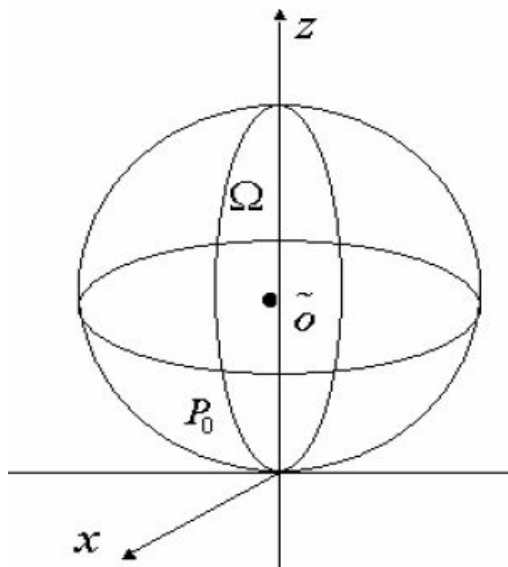
$$\iiint_{\Omega} x^2 dV = \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr = \frac{4}{15} \pi R^5$$

于是

$$\iiint_{\Omega} kx \left[(x-R)^2 + y^2 + z^2 \right] dV = -2kR \cdot \frac{4}{15} \pi R^5 = -\frac{8k}{15} \pi R^6$$

故 $\bar{x} = -\frac{R}{4}$. 因此, 球体 Ω 的重心位置为 $(-\frac{R}{4}, 0, 0)$

方法2:



用 Ω 表示所考虑的球体, $\tilde{O}$ 表示球心, 以点 P_0 选为原点, 射线 $P_0\tilde{O}$ 为正 z 轴建立直角坐标系, 则球面的方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, 设 Ω 的重心位置为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 由对称性, 得 $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$, 设 μ 为 Ω 上点 (x, y, z) 处的密度, 按题设 $\mu = k[x^2 + y^2 + z^2]$

$$\text{所以 } \bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z \mu dV}{\iiint_{\Omega} \mu dV} = \frac{\iiint_{\Omega} kz(x^2 + y^2 + z^2) dV}{\iiint_{\Omega} k(x^2 + y^2 + z^2) dV}$$

$$\text{因为 } \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^2 \cdot r^2 \sin\varphi dr = \frac{32}{15} \pi R^5$$

$$\iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2 + z^2) dV = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^5 \sin\varphi \cos\varphi dr$$

$$= \frac{64}{3} \pi R^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\varphi \sin\varphi d\varphi = \frac{8}{3} \pi R^6$$

故 $\bar{z} = \frac{5}{4} R$. 因此, 球体 Ω 的重心位置为 $(0, 0, \frac{5R}{4})$.

九【证明】

方法1: 令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt, 0 \leq x \leq \pi$, 有 $F(0) = 0$, 由题设有 $F(\pi) = 0$.

又由题设 $\int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$, 用分部积分, 有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\pi f(x) \cos x dx = \int_0^\pi \cos x dF(x) \\ &= F(x) \cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi F(x) \sin x dx = \int_0^\pi F(x) \sin x dx \end{aligned}$$

由积分中值定理知, 存在 $\xi \in (0, \pi)$ 使

$$0 = \int_0^\pi F(x) \sin x dx = F(\xi) \sin \xi \cdot (\pi - 0)$$

因为 $\xi \in (0, \pi)$, $\sin \xi \neq 0$, 所以推知存在 $\xi \in (0, \pi)$, 使得 $F(\xi) = 0$. 再在区间

$[0, \xi]$ 与 $[\xi, \pi]$ 上对 $F(x)$ 用罗尔定理, 推知存在 $\xi_1 \in (0, \xi)$, $\xi_2 \in (\xi, \pi)$ 使

$$F'(\xi_1) = 0, F'(\xi_2) = 0, \text{ 即 } f(\xi_1) = 0, f(\xi_2) = 0$$

方法2: 由 $\int_0^\pi f(x) dx = 0$ 及积分中值定理知, 存在 $\xi_1 \in (0, \pi)$, 使 $f(\xi_1) = 0$. 若在区间 $(0, \pi)$

内 $f(x)$ 仅有一个零点 ξ_1 , 则在区间 $(0, \xi_1)$ 与 (ξ_1, π) 内 $f(x)$ 异号. 不妨设在 $(0, \xi_1)$ 内

$f(x) > 0$, 在 (ξ_1, π) 内 $f(x) < 0$. 于是由 $\int_0^\pi f(x) dx = 0, \int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$, 有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\pi f(x) \cos x dx - \int_0^\pi f(x) \cos \xi_1 dx = \int_0^\pi f(x) (\cos x - \cos \xi_1) dx \\ &= \int_0^{\xi_1} f(x) (\cos x - \cos \xi_1) dx + \int_{\xi_1}^\pi f(x) (\cos x - \cos \xi_1) dx \end{aligned}$$

当 $0 < x < \xi_1$ 时, $\cos x > \cos \xi_1$, $f(x)(\cos x - \cos \xi_1) > 0$; 当 $\xi_1 < x < \pi$ 时,

$\cos x < \cos \xi_1$, 仍有 $f(x)(\cos x - \cos \xi_1) > 0$, 得到: $0 > 0$. 矛盾, 此矛盾证明了 $f(x)$

在 $(0, \pi)$ 仅有1个零点的假设不正确, 故在 $(0, \pi)$ 内 $f(x)$ 至少有2个不同的零点.

十【分析】 本题为解矩阵方程问题, 相当于是未知矩阵, 其一般原则是先简化, 再计算, 根据题设等式, 可先右乘 A , 再左乘 A^* , 尽量不去计算 A^{-1}

【详解】方法1: 由 $AA^* = A^*A = |A|E$, 知 $|A^*| = |A|^{n-1}$, 因此有 $8 = |A^*| = |A|^3$,

于是 $|A| = 2$, 所以 $A^*A = 2$

等式 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$ 两边先右乘 A , 得 $ABA^{-1}A = BA^{-1}A + 3EA$

再左乘 A^* , 得 $A^*ABA^{-1}A = A^*BA^{-1}A + A^*3EA$

$$\text{化简} \quad \Rightarrow |A| BE = A^* BE + 3A^* A \Rightarrow 2B = A^* B + 3|A| E$$

$$\Rightarrow 2B = A^* B + 6E \Rightarrow (2E - A^*)B = 6E,$$

于是

$$B = (2E - A^*)^{-1} \\ = 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}^{-1} = 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(由初等变换法求得)

方法2: $|A| = 2$ (同解1), 由 $AA^* = A^*A = |A|E$, 得

$$A = |A|(A^*)^{-1} = 2(A^*)^{-1} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

(由初等变换法求得), 可见 $A - E$ 为逆矩阵.

于是, 由 $(A - E)BA^{-1} = 3E$, 有 $B = 3(A - E)^{-1}A$, 而

$$(A - E)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix},$$

因此

$$B = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

方法3: 由题设条件 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$, 得 $(A - E)BA^{-1} = 3E$.

知: $A - E$, B 均是可逆矩阵, 且

$$B = 3(A - E)^{-1}A = 3[A^{-1}(A - E)]^{-1} = 3(E - A^{-1})^{-1} = 3\left(E - \frac{A^*}{|A|}\right)^{-1}$$

由 $|A^*| = |A|^{n-1}$, 其中 $n=4$, $|A^*|=8$, 得 $|A|=2$ 故

$$B = 3 \left(E - \frac{A^*}{2} \right)^{-1} = 3 \cdot \left(\frac{2E - A^*}{2} \right)^{-1} = 6(2E - A^*)^{-1}$$

其中

$$2E - A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}, \quad (2E - A^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix},$$

$$\text{所以} \quad B = 6(2E - A^*)^{-1} = 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

十一【详解】(1)由题意, $\frac{1}{6}x_n + y_n$ 是非熟练工人数, $\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}x_n + y_n\right)$ 是年终由非熟练工人

变成的熟练工人数, $\frac{5}{6}x_n$ 是年初支援其他部门后的熟练工人数, 根据年终熟练工的人数列

出等式(1), 根据年终非熟练工人人数列出等式(2)得

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{5}{6}x_n + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}x_n + y_n\right) & (1) \\ y_{n+1} = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}x_n + y_n\right) & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{n+1} = \frac{5}{6}x_n + \frac{1}{15}x_n + \frac{2}{5}y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{10}x_n + \frac{3}{5}y_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{n+1} = \frac{9}{10}x_n + \frac{2}{5}y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{10}x_n + \frac{3}{5}y_n \end{cases}, \quad \text{即} \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

可见

$$A = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

(2) 把 η_1, η_2 作为列向量写成矩阵的形式 (η_1, η_2) , 因为其行列式

$$|(\eta_1, \eta_2)| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

矩阵为满秩, 由矩阵的秩和向量的关系可见 η_1, η_2 线性无关.

又

$$A\eta_1 = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \eta_1, \quad A\eta_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\eta_2,$$

由特征值、特征向量的定义, 得 η_1 为 A 的属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, η_2 为 A 的属于特征值 $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ 特征向量.

(3) 因为

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \cdots = A^n \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

因此只要计算 A^n 即可. 令

$$P = (\eta_1, \eta_2) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

则由 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$, 有 $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$,

于是

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^n & 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n & 1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}$$

其中求逆矩阵的过程为:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\text{所以} \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 8-3\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}$$

十二【分析】此分布为一典型分布——几何分布.

【详解】显然 X 是一个离散型随机变量. 取值范围为 $1, 2, 3, \dots$. 现在关键在于建立 X 的分布律. 生产线上每个产品的生产可理解为一个试验. 各个产品合格与否是相互独立的, 可以看成是各次试验是相互独立的. 生产了个产品停机, 应该理解为第 X 个产品是不合格产品, 而前 $X-1$ 个产品则必为合格产品, 这就不难写出分布律.

记 $q=1-p$, X 的概率分布为 $P\{X=k\}=q^{k-1}p, (k=1, 2, \dots)$. 由离散型随机变量的数学期望定义得, X 的数学期望为

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kP\{X=k\} = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = p \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)' = p \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right)' = p \left(\frac{q}{1-q} \right)' = \frac{1}{p}$$

因为

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P\{X=k\} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} p = p \left[q \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right)' \right]' = p \left[\frac{q}{(1-q)^2} \right]' = \frac{2-p}{p^2}$$

(因为幂级数在其收敛区间内可逐项求导的性质, 上面求 $E(X)$ 和 $E(X^2)$ 时都用到了先求导化为易求和的级数, 再积分还原的过程.)

故 X 的方差为

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

十三【概念】最大似然估计, 实质上就是找出使似然函数最大的那个参数, 问题的关键在于构造似然函数. 似然函数的定义:

设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是相应于样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的一组观测值, 则似然函数为:

$$L(\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \cdots f(x_n; \theta)$$

【详解】似然函数为

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \begin{cases} 2^n e^{-2 \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)}, & x \geq \theta (i=1, 2, \dots, n) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当 $x_i \geq \theta (i=1, 2, \dots, n)$ 时, $L(\theta) > 0$, 所以 $\ln L(\theta) = n \ln 2 - 2 \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)$.

(由于 $\ln L$ 是单调递增函数, L 取最大与 $\ln L$ 取最大取到的 θ 是一致的, 而加对数后能把连乘转换成累加, 这样求导, 找极值比较方便)

而

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 2n > 0,$$

所以 $L(\theta)$ 单调增加. 要使得 $L(\theta)$ 值最大, θ 是越大越好.

又由于 θ 必须满足 $x_i \geq \theta (i=1, 2, \dots, n)$, 因此当 θ 取 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 中的最小值时,

$x_i \geq \theta (i=1, 2, \dots, n)$ 恒成立, 且此时 $L(\theta)$ 取最大值, 所以 θ 的最大似然估计值为

$$\hat{\theta} = \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$$