

2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题解析

一、填空题

(1) 【答案】 $\frac{\partial z}{\partial x} = yf_1' + \frac{1}{y}f_2' - \frac{y}{x^2}g'$

【详解】根据复合函数的求导公式，有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot y + f_2' \cdot \frac{1}{y} + g' \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

(2) 【答案】 $\frac{\pi}{4e}$

【详解】被积函数的分母中含有 $e^x + e^{2-x}$ ，且当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $e^x + e^{2-x} \rightarrow +\infty$ ，即被积函数属于无穷限的反常积分，只需先求不定积分，在令其上限趋于无穷。

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{2-x}} &= \int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x + \frac{e^2}{e^x}} = \int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + e^2} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{e^2 + e^{2x}} de^x \\&= \frac{1}{e^2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{e^x}{e}\right)^2} de^x = \frac{e}{e^2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{e^x}{e}\right)^2} d\left(\frac{e^x}{e}\right) \\&= \frac{1}{e} \arctan \frac{e^x}{e} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{e} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4e}\end{aligned}$$

(3) 【答案】 24

【详解】

方法 1: $A \sim B \Rightarrow A, B$ 有相同的特征值: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$. 由矩阵 B^{-1} 是矩阵 B 的逆矩阵，他们

所有特征值具有倒数的关系，得 B^{-1} 有特征值 2, 3, 4, 5，由 B 特征矩阵为 $|\lambda E - B|$ ，

$B^{-1} - E$ 得特征矩阵为 $|\lambda E - (B^{-1} - E)| = |(\lambda - 1)E - B^{-1}|$ 可以看出 B 与 $B^{-1} - E$ 的特

征值相差 1，所以 $B^{-1} - E$ 有特征值 1, 2, 3, 4. 由矩阵的行列式等于其特征值得乘积，所

有特征值的和等于矩阵主对角元素之和，知 $|B^{-1} - E| = \prod_{i=1}^4 \lambda_i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

方法 2: $A \sim B$ 即存在可逆阵 P ，使得 $P^{-1}AP = B$. 两边求逆得 $B^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$. 又 A 有四

个不同的特征值，存在可逆矩阵 Q ，使

$$Q^{-1}AQ = \Lambda, \text{ 其中 } \Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & \\ & \frac{1}{3} & & \\ & & \frac{1}{4} & \\ & & & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\text{上式两边求逆得 } Q^{-1}A^{-1}Q = \Lambda = \Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 3 & & \\ & & 4 & \\ & & & 5 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = Q\Lambda^{-1}Q^{-1}$$

从而有

$$\begin{aligned} |B^{-1} - E| &= |P^{-1}A^{-1}P - E| = |P^{-1}||A^{-1} - E||P| = |Q\Lambda^{-1}Q^{-1} - E| \\ &= |Q||\Lambda^{-1} - E||Q^{-1}| = \left| \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 3 & & \\ & & 4 & \\ & & & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \right| = 24 \end{aligned}$$

(4) 【答案】 $[1, 3]$.

【详解】 在给定概率密度条件下，有性质 $P\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$. 因此，

$$P\{X \geq k\} = \int_k^{+\infty} f(x)dx \text{ (或 } P\{X \geq k\} = 1 - P\{X < k\} = 1 - \int_{-\infty}^k f(x)dx.)$$

因为 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = \frac{1}{3}$; $x \in [3, 6]$ 时, $f(x) = \frac{2}{9}$ 都是定值, 因为 $P\{X \geq k\} = \frac{2}{3} < 1$,

所以 k 最可能的取值区间是包含在 $[0, 6]$ 区间之内的 $[1, 3]$ 区间, 否则是不可能的.

当 $1 \leq k \leq 3$ 时, $P\{X \geq k\} = \int_k^{+\infty} f(x)dx = \frac{2}{9} \times (6 - 3) = \frac{2}{3}$. (或者, 当 $1 \leq k \leq 3$ 时,

$$P\{X < k\} = \int_{-\infty}^k f(x)dx = \frac{1}{3} \times (1 - 0) = \frac{1}{3}, \quad P\{X \geq k\} = 1 - P\{X < k\} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.)$$

所以, 答案应该填 $1 \leq k \leq 3$ 或 $[1, 3]$.

(5) 【答案】 $\frac{8}{9}$.

【详解】 由于题中 Y 是离散型随机变量, 其所取值的概率分别为 $P\{X > 0\}, P\{X = 0\}$ 和

$P\{X < 0\}$. 又由于 X 是均匀分布, 所以可以直接得出这些概率, 从而实现由 X 的概率计算过渡到 Y 的概率.

$$P\{Y = -1\} = P\{X < 0\} = \frac{0 - (-1)}{3} = \frac{1}{3};$$

$$P\{Y = 0\} = P\{X = 0\} = 0; \quad P\{Y = 1\} = P\{X > 0\} = \frac{2-0}{3} = \frac{2}{3}.$$

因此 $E(Y) = -1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}, \quad E(Y^2) = (-1)^2 \times \frac{1}{3} + 1^2 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1,$

所以 $D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$

二、选择题

(1) 【答案】D

【详解】用排除法.

例 1: 设 $\frac{x^2}{x^2+2} \leq f(x) \leq \frac{x^2+1}{x^2+2}$, 满足条件 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2+1}{x^2+2} - \frac{x^2}{x^2+2} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2+2} = 0$, 并且

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2+2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2+2} = 1,$$

由夹逼准则知, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, 则选项 (A) 与 (C) 错误.

例 2: 设 $\frac{x^6+x^2}{x^4+1} \leq f(x) \leq \frac{x^6+2x^2}{x^4+1}$, 满足条件

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^6+2x^2}{x^4+1} - \frac{x^6+x^2}{x^4+1} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^4+1} = 0,$$

但是由于

$$f(x) \geq \frac{x^6+x^2}{x^4+1} = x^2,$$

有 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, 极限不存在, 故不选 (B), 所以选 (D).

因为最终结论是“(D): 不一定存在”, 所以只能举例说明“可以这样”“可以那样”, 无法给出相应的证明.

(2) 【答案】B

【详解】方法 1: 排除法, 用找反例的方式

(A): $f(x) = x^2$, 满足 $f(0) = 0$ 且 $f'(0) = 0$, 但 $|f(x)| = x^2$ 在 $x = 0$ 处可导;

(C): $f(x) = x+1$, 满足 $f(0) = 1 > 0$, $f'(0) = 1 > 0$, 但 $|f(x)| = x+1$ 当 $x \in (-1, 1)$, 在

$x=0$ 处可导;

(D): $f(x) = -x - 1$, 满足 $f(0) = -1 < 0$, $f'(0) = -1 < 0$, 但 $|f(x)| = x + 1$ 当 $x \in (-1, 1)$,

在 $x=0$ 处可导;

方法 2: 推理法.

由 (B) 的条件 $f(a) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)| - |f(a)|}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a)|}{x - a}$,

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{|f(x) - f(a)|}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| = |f'(a)| \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{|f(x) - f(a)|}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \left(- \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \right) = -|f'(a)| \quad (2)$$

可见, $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处可导的充要条件是 $|f'(a)| = -|f'(a)|$, 所以 $|f'(a)| = 0$,

即 $f'(a) = 0$ 所以当 $f'(a) \neq 0$ 时必不可导, 选 (B).

(3) 【答案】(C)

【详解】因为 $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)^T$ 是非齐次方程组的解向量所以我们有 $A\alpha_1 = b$, 故 α_1 是 $AX = b$ 的一个特解

又 $r(A) = 3, n = 4$ (未知量的个数), 故 $AX = b$ 的基础解系由一个非零解组成. 即基础解系的个数为 1.

$$\text{因为 } A(2\alpha_1 - (\alpha_2 + \alpha_3)) = 2b - b - b = 0, \text{ 故 } 2\alpha_1 - (\alpha_1 + \alpha_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ 是对}$$

应齐次方程组的基础解系, 故 $AX = b$ 的通解为

$$c(2\alpha_1 - (\alpha_2 + \alpha_3)) + \alpha_1 = c \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(4) 【答案】(A)

【详解】若 α 是方程组 (I): $AX = 0$ 的解, 即 $A\alpha = 0$, 两边左乘 A^T , 得 $A^T A\alpha = 0$, 即 α 也是方程组 (II): $A^T AX = 0$ 的解, 即 (I) 的解也是 (II) 的解.

若 β 是方程组 (II): $A^T AX = 0$ 的解, 即 $A^T A\beta = 0$, 两边左乘 β^T 得

$\beta^T A^T A \beta = (A\beta)^T A\beta = 0$. $A\beta$ 是一个向量, 设 $A\beta = [b_1, b_2, \dots, b]^T$, 则

$$(A\beta)^T A\beta = \sum_{i=1}^n b_i^2 = 0.$$

故有 $b_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$ 从而有 $A\beta = 0$, 即 β 也是方程组 (I): $AX = 0$ 的解.

(5) 【答案】C

【详解】随机变量 $T_{(1)}, T_{(2)}, T_{(3)}, T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值, 事件 E 表示事件“电炉断电”, 即有两个温控器显示的温度不低于 t_0 , 此时必定两个显示较高的温度大于等于 t_0 , 即 $T_{(4)} \geq T_{(3)} \geq t_0$. 所以说断电事件就是 $\{T_{(3)} \geq t_0\}$

三【详解】本题属于二阶常系数非齐次线性微分方程, 对于二阶常系数非齐次线性微分方程得求解, 首先需要求出对应的齐次微分方程的通解, 再求出非齐次方程的特解, 再利用线性方程解的解构, 从而得到对应方程的通解.

本题对应的齐次微分方程为 $y'' - 2y' = 0$,

其特征方程为 $r^2 - 2r = 0$,

特征根为 $r_1 = 0, r_2 = 2$. 于是齐次方程的通解为 $Y = C_1 + C_2 e^{2x}$.

由于 $\lambda = 2$ 是特征方程的单根, 所以设 $y^* = A x e^{2x}$

求得 $y^{*'} = A e^{2x} + 2A x e^{2x}; y^{*''} = 4A e^{2x} + 4A x e^{2x}$

代入原方程, 得 $4A e^{2x} + 4A x e^{2x} - 2A e^{2x} - 4A x e^{2x} = e^{2x}$, 即 $2A e^{2x} = e^{2x}$

约去 e^{2x} , 再比较等式左、右两边, 得 $2A = 1, A = \frac{1}{2}$

故得特解 $y^* = \frac{1}{2} x e^{2x}$, 非齐次方程的通解为 $y = Y + y^* = C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} x e^{2x}$.

再由初始条件 $y(0) = 1$, 得: $C_1 + C_2 = 1$ (1)

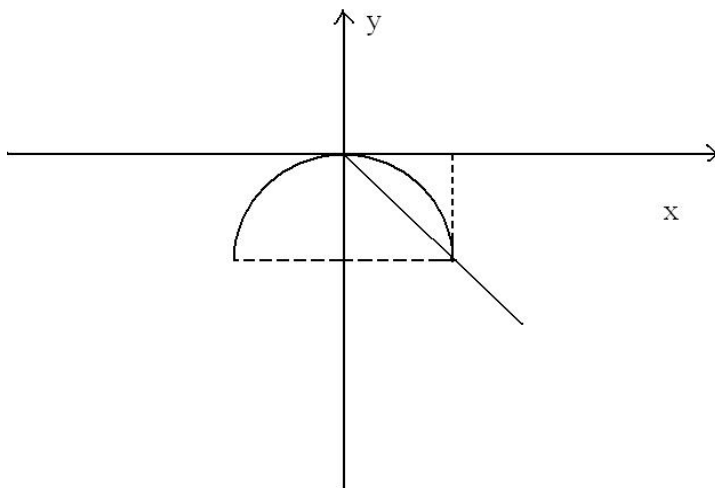
由 $y'(0) = 1$, 得 $\left(C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} x e^{2x} \right)' \Big|_{x=0} = \left(2C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{2x} + x e^{2x} \right) \Big|_{x=0} = 2C_2 + \frac{1}{2} = 1$ (2)

联立(1)与(2)得 $C_1 = \frac{3}{4}, C_2 = \frac{1}{4}$

则满足初始条件的通解为

$$y = \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x\right)e^{2x}.$$

四【详解】



画出积分区域 D . 由被积函数的形式以及积分区域形状, 易见采用极坐标更为方便.

将曲线 $y = -a + \sqrt{a^2 - x^2}$ 化为: $x^2 + (y + a)^2 = a^2 (y \geq -a)$, 极坐标方程为 $r = -2a \sin \theta (-\pi \leq \theta \leq 0)$,

再 D 区域是由曲线 $y = -a + \sqrt{a^2 - x^2} (a > 0)$ 和直线 $y = -x$ 围成的区域, 于是 $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq 0$, 极半径 $0 \leq r \leq -2a \sin \theta$, 则

$$I = \iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}} d\sigma = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta \int_0^{-2a \sin \theta} \frac{r^2}{\sqrt{4a^2 - r^2}} dr.$$

令 $r = 2a \sin t$, 有 $r = 0$ 时 $t = 0$; $r = -2a \sin \theta$ 时, $t = -\theta$.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta \int_0^{-\theta} 4a^2 \frac{\sin^2 t}{2a \cos t} 2a \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta \int_0^{-\theta} 4a^2 \sin^2 t dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta \int_0^{-\theta} 2a^2 (1 - \cos 2t) dt = 2a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{-\theta} d\theta \\ &= 2a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \left(-\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) d\theta = 2a^2 \cdot \left(-\frac{\theta^2}{2} - \frac{1}{4} \cos 2\theta \right) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^0 = a^2 \left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

五【定理】简单极值问题(无条件极值): 设 $z = f(x, y)$ 在开区域 D 内可偏导, 又根据实际

问题可知, 它在 D 内有最大值或最小值, 于是只需在 $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ 的点中找到 $f(x, y)$ 的

最大值点或最小值点

【详解】记总利润函数为 L , 总收益函数为 R , 则总利润 = 总收益 - 总成本

$$\begin{aligned} L &= R - C = p_1 Q_1 + p_2 Q_2 - (2Q + 5) = p_1 Q_1 + p_2 Q_2 - [2(Q_1 + Q_2) + 5] \\ &= (18 - 2Q_1)Q_1 + (12 - Q_2)Q_2 - [2(Q_1 + Q_2) + 5] \\ &= 18Q_1 - 2Q_1^2 + 12Q_2 - Q_2^2 - 2Q_1 - 2Q_2 - 5 = -2Q_1^2 - Q_2^2 + 16Q_1 + 10Q_2 - 5 \end{aligned}$$

其中, $Q_1 > 0, Q_2 > 0$, $Q = Q_1 + Q_2$ 为销售总量.

$$(1) \quad \text{令 } \frac{\partial L}{\partial Q_1} = -4Q_1 + 16 = 0, \frac{\partial L}{\partial Q_2} = -2Q_2 + 10 = 0, \text{ 解得 } Q_1 = 4, Q_2 = 5. \text{ 而 } P_1 = 18 - 2Q_1,$$

$$P_2 = 12 - Q_2, \text{ 故相应地 } p_1 = 10, p_2 = 7.$$

在 $Q_1 > 0, Q_2 > 0$ 的范围内驻点唯一, 且实际问题在 $Q_1 > 0, Q_2 > 0$ 范围内必有最大值,

故在 $Q_1 = 4, Q_2 = 5$ 处 L 为最大值.

$$\max L = -2 \times 4^2 - 5^2 + 16 \times 4 + 10 \times 5 - 5 = 52 \text{ (万元)}.$$

(2) 若两地的销售单价无差别, 即 $p_1 = p_2$, 于是 $18 - 2Q_1 = 12 - Q_2$, 得 $2Q_1 - Q_2 = 6$,

在此约束条件下求 L 的最值, 以下用两个方法:

方法 1: 若求函数 $z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 的最大值或最小值, 用拉格朗日乘数法:

先构造辅助函数 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$, 然后解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

所有满足此方程组的解 (x, y, λ) 中的 (x, y) 是 $z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 的可能极值点, 在可能极值点中求得最大值点或最小值点.

故用拉格朗日乘数法, 其中 $\varphi(Q_1, Q_2) = 2Q_1 - Q_2 - 6 = 0$, 构造函数

$$F(Q_1, Q_2, \lambda) = -2Q_1^2 - Q_2^2 + 16Q_1 + 10Q_2 - 5 + \lambda(2Q_1 - Q_2 - 6),$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial Q_1} = -4Q_1 + 16 + 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial Q_2} = -2Q_2 + 10 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 2Q_1 - Q_2 - 6 = 0 \end{cases}$$

解得 $Q_1 = 5$, $Q_2 = 4$, 在 $Q_1 > 0, Q_2 > 0$ 的范围内驻点唯一, 且实际问题在

$Q_1 > 0, Q_2 > 0$ 范围内必有最大值, 故在 $Q_1 = 5$, $Q_2 = 4$ 处 L 为最大值. 得

$$\max L = -2 \times 5^2 - 4^2 + 16 \times 5 + 10 \times 4 - 5 = 49 \text{ (万元)} .$$

方法 2: 由 $2Q_1 - Q_2 = 6$ 代入 $L = -2Q_1^2 - Q_2^2 + 16Q_1 + 10Q_2 - 5$ 消去一个变量得

$$L = -6Q_1^2 + 60Q_1 - 101$$

这样就变成了简单极值问题(无条件极值), 按(1)的做法: 令 $\frac{dL}{dQ_1} = -12Q_1 + 60 = 0$,

得 $Q_1 = 5$, 为 L 的唯一驻点.

当 $0 < Q_1 < 5$ 时 $\frac{dL}{dQ_1} > 0$ (说明在这个区间上函数单调递增); 当 $Q_1 > 5$ 时 $\frac{dL}{dQ_1} < 0$ (说

明在这个区间上函数单调递减)

故, $Q_1 = 5$ 为 L 的唯一极大值点, 所以是最大值点, 而 $2Q_1 - Q_2 = 6 \Rightarrow Q_2 = 4$, 故

$$\max L = -6Q_1^2 + 60Q_1 - 101 = -6 \times 5^2 + 60 \times 5 - 101 = 49 \text{ (万元)} .$$

六【渐近线】 水平渐近线: 若有 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, 则 $y = a$ 为水平渐近线;

铅直渐近线: 若有 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, 则 $x = a$ 为铅直渐近线;

斜渐近线: 若有 $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$ 存在且不为 ∞ , 则

$y = ax + b$ 为斜渐近线.

【详解】 原函数对 x 求导,

$$\text{所以 } y' = e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x} + (x-1) \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \arctan x\right)' e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x}$$

$$= e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x} + (x-1) \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x} = \frac{x^2+x}{x^2+1} e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x}$$

令 $y' = 0$, 得驻点 $x_1 = 0, x_2 = -1$.

列表

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y'	+	0	-	0	+
y		$-2e^{\frac{\pi}{4}}$		$-e^{\frac{\pi}{2}}$	

注: + 表示函数值大于 0, - 表示函数值小于 0; 表示在这区间内单调递增; 表示在这区间内单调递减.

所以由以上表格可以得出函数的大概形状, 有严格单调增的区间为 $(-\infty, -1)$ 与 $(0, +\infty)$; 严格单调减的区间为 $(-1, 0)$. $f(0) = -e^{\frac{\pi}{2}}$ 为极小值, $f(-1) = -2e^{\frac{\pi}{4}}$ 为极大值.

以下求渐近线. 通过对函数大概形状的估计,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x-1)e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x} = e^{\pi} \lim_{x \rightarrow \infty} (x-1) = \infty$$

所以此函数无水平渐近线; 同理, 也没有铅直渐近线. 所以令

$$a_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = e^{\pi}, b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - a_1 x] = -2e^{\pi};$$

$$a_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - a_2 x] = -2.$$

所以, 渐近线为 $y = a_1 x + b_1 = e^{\pi}(x-2)$ 及 $y = a_2 x + b_2 = x-2$, 共两条.

七【概念】 幂级数的收敛半径: 若 $\rho = \left| \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} a_{n+1}}{\lim_{x \rightarrow \infty} a_n} \right|$, 其中 a_n, a_{n+1} 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的相邻两

项的系数, 则这幂级数的收敛半径

$$R = \begin{cases} 1/\rho, & \rho \neq 0, \\ +\infty, & \rho = 0, \\ 0, & \rho = +\infty. \end{cases}$$

【详解】 先计算出积分 I_n 的具体表达式, 再求和

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x d \sin x = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n+1}$$

则

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n+1}.$$

考虑幂级数

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1},$$

求出幂级数的和函数, 代入 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 即可得出答案, 按通常求收敛半径的办法.

所以

$$\rho = \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

得到本题中幂级数的收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 1$, 在 $(-1, 1)$ 内, 先微分再积分, 在收敛域内幂级数仍

收敛, 有

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

所以

$$S(x) = S(0) + \int_0^x S'(x) dx = 0 + \int_0^x \frac{1}{1-x} dx = -\ln |1-x|$$

以 $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \in (-1, 1)$ 代入, 得 $S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\ln\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \ln(2 + \sqrt{2})$.

即

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n = \ln(2 + \sqrt{2}).$$

八【证明】

方法1: 令 $F(x) = \int_0^x f(t) dt, 0 \leq x \leq \pi$, 有 $F(0) = 0$, 由题设有 $F(\pi) = 0$.

又由题设 $\int_0^{\pi} f(x) \cos x dx = 0$, 用分部积分, 有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{\pi} f(x) \cos x dx = \int_0^{\pi} \cos x dF(x) \\ &= F(x) \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} F(x) \sin x dx = \int_0^{\pi} F(x) \sin x dx \end{aligned}$$

由积分中值定理知, 存在 $\xi \in (0, \pi)$ 使

$$0 = \int_0^{\pi} F(x) \sin x dx = F(\xi) \sin \xi \cdot (\pi - 0)$$

因为 $\xi \in (0, \pi)$, $\sin \xi \neq 0$, 所以推知存在 $\xi \in (0, \pi)$, 使得 $F(\xi) = 0$. 再在区间

$[0, \xi]$ 与 $[\xi, \pi]$ 上对 $F(x)$ 用罗尔定理, 推知存在 $\xi_1 \in (0, \xi)$, $\xi_2 \in (\xi, \pi)$ 使

$$F'(\xi_1) = 0, F'(\xi_2) = 0, \text{ 即 } f(\xi_1) = 0, f(\xi_2) = 0$$

方法2: 由 $\int_0^{\pi} f(x) dx = 0$ 及积分中值定理知, 存在 $\xi_1 \in (0, \pi)$, 使 $f(\xi_1) = 0$. 若在区间 $(0, \pi)$

内 $f(x)$ 仅有一个零点 ξ_1 , 则在区间 $(0, \xi_1)$ 与 (ξ_1, π) 内 $f(x)$ 异号. 不妨设在 $(0, \xi_1)$ 内

$f(x) > 0$, 在 (ξ_1, π) 内 $f(x) < 0$. 于是由 $\int_0^{\pi} f(x) dx = 0, \int_0^{\pi} f(x) \cos x dx = 0$, 有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{\pi} f(x) \cos x dx - \int_0^{\pi} f(x) \cos \xi_1 dx = \int_0^{\pi} f(x) (\cos x - \cos \xi_1) dx \\ &= \int_0^{\xi_1} f(x) (\cos x - \cos \xi_1) dx + \int_{\xi_1}^{\pi} f(x) (\cos x - \cos \xi_1) dx \end{aligned}$$

当 $0 < x < \xi_1$ 时, $\cos x > \cos \xi_1$, $f(x)(\cos x - \cos \xi_1) > 0$; 当 $\xi_1 < x < \pi$ 时,

$\cos x < \cos \xi_1$, 仍有 $f(x)(\cos x - \cos \xi_1) > 0$, 得到: $0 > 0$. 矛盾, 此矛盾证明了 $f(x)$

在 $(0, \pi)$ 仅有1个零点的假设不正确, 故在 $(0, \pi)$ 内 $f(x)$ 至少有2个不同的零点.

九【详解】

方法1: 设方程组 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \beta$

①

对方程组的增广矩阵作初等行变换, 化成阶梯形矩阵, 有

$$\begin{aligned} [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta] &= \begin{bmatrix} a & -2 & -1 & \vdots & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & b \\ 10 & 5 & 4 & \vdots & c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & -2 & -1 & \vdots & 1 \\ 2+a & -1 & 0 & \vdots & b+1 \\ 10+4a & -3 & 0 & \vdots & c+4 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} a & -2 & 1 & \vdots & 1 \\ 2+a & -1 & 0 & \vdots & b+1 \\ 4+a & 0 & 0 & \vdots & c-3b+1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(1) 当 $a \neq -4$ 时, $r[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = r[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta] = 3$. 方程组①唯一解, 即 β 可

由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 且表出唯一.

(2) 当 $a = -4$, 但 $c - 3b + 1 \neq 0$ 时, $r[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = 2 \neq r[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta] = 3$ 方程组

①无解, β 不可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出

(3) 当 $a = -4$, 且 $c - 3b + 1 = 0$ 时, $r[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = r[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta] = 2$ 方程组①

有无穷多解, 此时有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta] \rightarrow \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 & \vdots & 1 \\ -2 & -1 & 0 & \vdots & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

得对应齐次方程组的基础解系为: $\xi = (1, -2, 0)^T$ (取自由未知量 $x_1 = 1$, 回代得

$x_2 = -2, x_3 = 0$), 非齐次方程的一个特解是 $\eta^* = [0, -(b+1), (2b+1)]^T$, 故通解为

$$k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -(b+1) \\ 2b+1 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } k \text{ 是任意常数.}$$

方法 2: 设方程组 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \beta$ ①

因为①是三个方程的三个未知量的线性非齐次方程组, 故也可由系数行列式讨论,

$$|A| = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} a & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1(a+4)$$

因此知道:

(1) 当 $a \neq -4$ 时, $|A| \neq 0$, 方程组有唯一解, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 且表出唯一.

(2) 当 $a = -4$ 时, (有可能无解或无穷多解)对增广矩阵作初等行变换, 得

$$\begin{aligned} [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta] &= \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 & \vdots & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & b \\ 10 & 5 & 4 & \vdots & c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2b+1 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & c-5b \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & c-3b+1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(i) 当 $a = -4$ 时, 且但 $c - 3b + 1 \neq 0$ 时, 有 $r[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = 2 \neq r[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta] = 3$ 方程组①无解.

(ii) 当 $a = -4$, 且 $c - 3b + 1 = 0$ 时, $r[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = r[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta] = 2$ 方程组①有无穷多解, 其通解为

$$k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -(b+1) \\ 2b+1 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } k \text{ 是任意常数.}$$

十【详解】方法 1: 用正定性的定义判别.

已知对任意的 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 均有 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$,

$$\text{其中等号成立当且仅当} \begin{cases} x_1 + a_1 x_2 = 0 \\ x_2 + a_2 x_3 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-1} + a_{n-1} x_n = 0 \\ x_n + a_n x_1 = 0 \end{cases} \quad \text{①}$$

方程组①仅有零解的充分必要条件是系数行列式

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1} a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$$

即当 $a_1 \cdot a_2 \dots a_n \neq (-1)^n$ 时, 方程组①只有零解, 此时 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. 若对任意的非零向量 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$, ①中总有一个方程不为零, 则有

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + a_1 x_2)^2 + (x_2 + a_2 x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} + a_{n-1} x_n)^2 + (x_n + a_n x_1)^2 > 0$$

所以, 根据正定二次型的定义, 对任意的向量 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 如果 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$,

则二次型正定. 由以上证明题中 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是正定二次型.

方法 2: 将二次型表示成矩阵形式, 有

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (x_1 + a_1 x_2)^2 + (x_2 + a_2 x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} + a_{n-1} x_n)^2 + (x_n + a_n x_1)^2 \\ &= [x_1 + a_1 x_2, x_2 + a_2 x_3, \dots, x_{n-1} + a_{n-1} x_n, x_n + a_n x_1] \begin{bmatrix} x_1 + a_1 x_2 \\ x_2 + a_2 x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} + a_{n-1} x_n \\ x_n + a_n x_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\text{记 } B = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\text{则 } f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T B^T B X = (BX)^T B X \geq 0$$

当

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$$

即当 $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \neq (-1)^n$ 时, $BX=0$ 只有零解, 故当任意的 $X \neq 0$ 时, 均有

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (BX)^T B X > 0$, 从而由正定二次型的定义, 对任意的向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,

如果 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) > 0$, 则 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是正定二次型.

十一【详解】 $Y = \ln X \Rightarrow X = e^Y$. 题设条件 Y 为正态, 故 $E(X) = E(e^Y)$ 可用函数的期望的公式求得. 将 X 的样本可以转化成 Y 的样本, 从而对正态 $Y \sim N(\mu, 1)$ 中的 μ 求得置信区间. 最后, 再从 μ 的置信区间转得 b 的置信区间.

(1) 由正态分布密度函数的定义知, Y 的概率密度为

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}, -\infty < y < +\infty,$$

于是 $b = E(X) = E(e^Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^y \cdot e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}} dy$

令 $t = y - \mu$, 有 $b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t+\mu} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = e^{\mu+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2} dt = e^{\mu+\frac{1}{2}}.$

(2) 当置信度 $1 - \alpha = 0.95$ 时, $\alpha = 0.05$. 查表可知标准正态分布的双侧分位数等于 1.96.

故由 $\bar{Y} \sim N(\mu, \frac{1}{4})$, 其中 $\bar{Y}$ 表示总体 Y 的样本均值,

$$\bar{Y} = \frac{1}{4}(\ln 0.50 + \ln 0.80 + \ln 1.25 + \ln 2.00) = \frac{1}{4} \ln 1 = 0.$$

$\bar{Y}$ 是 μ 的无偏估计, 且 σ^2 已知, $\frac{\bar{Y} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1).$

所以, 按标准正态分布的 α 分位点的定义, 有 $P\left\{\left|\frac{\bar{Y} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right| < Z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha,$

即 $P\left\{\bar{Y} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} < \mu < \bar{Y} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha.$

这样, 我们就得到了 μ 的一个置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间 $\left(\bar{Y} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}, \bar{Y} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}\right)$

在此题中, $\sigma = 1, \mu = 4, \bar{Y} = 0$, 所以参数 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为

$$(\bar{Y} - 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{4}}, \bar{Y} + 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{4}}) = (-0.98, 0.98).$$

(3) 由指数函数 e^x 的严格单调递增性, 有

$$\begin{aligned} P\{-0.98 < \mu < 0.98\} &= P\left\{-0.48 < \mu + \frac{1}{2} < 1.48\right\} \\ &= P\left\{e^{-0.48} < e^{\mu+\frac{1}{2}} < e^{1.48}\right\} = P\{e^{-0.48} < b < e^{1.48}\} = 0.95 \end{aligned}$$

因此 b 的置信度为 0.95 的置信区间为 $(e^{-0.48}, e^{1.48})$.

十二 【分析】随机变量 X 和 Y 不相关 $\Leftrightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0$.

事件 A 与 B 相互独立 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.

要找出这二者之间的联系就应从 $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ 入手.

【详解】 $E(X) = 1 \cdot P\{A\} + (-1) \cdot P\{\bar{A}\} = 2P\{A\} - 1$ ，同理， $E(Y) = 2P\{B\} - 1$ 。

现在求 $E(XY)$ ，由于 XY 只有两个可能值 1 和 -1，所以

$$E(XY) = 1 \cdot P\{XY = 1\} + (-1) \cdot P\{XY = -1\},$$

其中 $P\{XY = 1\} = P\{X = 1, Y = 1\} + P\{X = -1, Y = -1\} = P\{AB\} + P\{\bar{A}\bar{B}\}$

$$= P\{AB\} + 1 - P\{A \cup B\} = 2P\{AB\} - P\{A\} - P\{B\} + 1$$

和 $P\{XY = -1\} = P\{X = 1, Y = -1\} + P\{X = -1, Y = 1\} = P\{A\bar{B}\} + P\{\bar{A}B\}$

$$= P\{A\} + P\{B\} - 2P\{AB\}$$

(或者 $P\{XY = -1\} = 1 - P\{XY = 1\} = P\{A\} + P\{B\} - 2P\{AB\}$)

所以 $E(XY) = P\{XY = 1\} - P\{XY = -1\} = 4P\{AB\} - 2P\{A\} - 2P\{B\} + 1$

由协方差公式，

$$Cov(XY) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$= 4P\{AB\} - 2P\{A\} - 2P\{B\} + 1 - [2P\{A\} - 1] \cdot [2P\{B\} - 1]$$

$$= 4[P\{AB\} - P\{A\}P\{B\}]$$

因此， $Cov(XY) = 0$ 当且仅当 $P\{AB\} = P\{A\}P\{B\}$ ，即 X 和 Y 不相关的充分必要条件是

A 与 B 相互独立。