

2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题

(1) 【答案】 $-1/6$

$$\text{【详解】 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)} \stackrel{\ln(1+2x^3) \sim 2x^3}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{2x^3} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{6x^2(1+x^2)} = -\frac{1}{6}$$

(2) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $2^{xy} = x + y$ 所确定, 则 $dy|_{x=0} =$ _____.

【答案】 $(\ln 2 - 1)dx$

【详解】

方法 1: 对方程 $2^{xy} = x + y$ 两边求微分, 有

$$2^{xy} \ln 2 \cdot (x dy + y dx) = dx + dy.$$

由所给方程知, 当 $x = 0$ 时 $y = 1$. 将 $x = 0, y = 1$ 代入上式, 有 $\ln 2 \cdot dx = dx + dy$.

所以, $dy|_{x=0} = (\ln 2 - 1)dx$.

方法 2: 两边对 x 求导数, 视 y 为该方程确定的函数, 有

$$2^{xy} \ln 2 \cdot (xy' + y) = 1 + y'.$$

当 $x = 0$ 时 $y = 1$, 以此代入, 得 $y' = \ln 2 - 1$, 所以 $dy|_{x=0} = (\ln 2 - 1)dx$.

(3) 【答案】 $\frac{\pi}{3}$

【详解】 由于被积函数在 $x = 2$ 处没有定义, 则该积分为广义积分. 对于广义积分, 可以先按照不定积分计算, 再对其求极限即可.

作积分变量替换, 令 $\sqrt{x-2} = t, x-2 = t^2 dx = 2t dt$,

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}} = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{(t^2+9)t} dt = 2 \cdot \frac{1}{3} \arctan \frac{t}{3} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

(4) 【答案】 $y = 2x + 1$

【公式】 $y = kx + b$ 为 $y = f(x)$ 的斜渐近线的计算公式: $k = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (x \rightarrow +\infty) \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{y}{x}, b = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (x \rightarrow +\infty) \\ (x \rightarrow -\infty)}} [f(x) - kx]$

【详解】 $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}} = 2,$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2x - 1)e^{\frac{1}{x}} - 2x] \quad \text{令 } \frac{1}{x} = u \quad \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{2e^u - 2}{u} - e^u \right) \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{2(e^u - 1)}{u} - e^u \right) \quad \frac{e^u - 1}{u} \sim 1 \quad \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{2u}{u} - e^u \right) = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

所以, $x \rightarrow +\infty$ 方向有斜渐近线 $y = 2x + 1$. 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 类似地有斜渐近线 $y = 2x + 1$.

总之, 曲线 $y = (2x - 1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为 $y = 2x + 1$.

(5) 【答案】 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

【详解】 先求出 $(E + B)^{-1}$ 然后带入数值, 由于 $B = (E + A)^{-1}(E - A)$, 所以

$$\begin{aligned} (E + B)^{-1} &= [E + (E + A)^{-1}(E - A)]^{-1} \\ &= [(E + A)^{-1}(E + A) + (E + A)^{-1}(E - A)]^{-1} \\ &= [2(E + A)^{-1}]^{-1} = \frac{1}{2}(E + A) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

二、选择题

(1) 【答案】 D

【详解】 排除法:

如果 $a < 0$, 则在 $(-\infty, +\infty)$ 内 $f(x)$ 的分母 $a + e^{bx}$ 必有零点 x_0 , 从而 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处不连续, 与题设不符. 不选 (A), 若 $b > 0$, 则无论 $a = 0$ 还是 $a \neq 0$ 均有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, 与题设 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 矛盾, 不选 (B) 和 (C). 故选 (D).

(2) 【答案】 C

【定理应用】判断极值的第二充分条件：设函数 $f(x)$ 在 x_0 出具有二阶导数且 $f'(x_0)=0$ ，

$f''(x_0) \neq 0$ ，那么：(1) 当 $f''(x_0) > 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

(2) 当 $f''(x_0) < 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值；

【详解】令等式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$ 中 $x=0$ ，得 $f''(0) = 0 - [f'(0)]^2 = 0$ ，无法利用判断极值的第二充分条件，故无法判断是否为极值或拐点。

再求导数(因为下式右边存在，所以左边也存在)：

$$f'''(x) = (x - [f'(x)]^2)' = 1 - 2f'(x)f''(x)$$

以 $x=0$ 代入，有 $f'''(0) = 1$ ，所以

$$f'''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x) - f''(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{x} = 1.$$

从而知，存在 $x=0$ 去心邻域，在此去心邻域内， $f''(x)$ 与 x 同号，于是推知在此去心邻域内当 $x < 0$ 时曲线 $y = f(x)$ 是凸的，在此去心邻域内 $x > 0$ 时曲线 $y = f(x)$ 是凹的，点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点，选(C)。

(3) 【答案】A

【分析】由选项答案可知需要利用单调性证明，关键在于寻找待证的函数。题设中已知

$$f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0, \text{ 想到设函数为相除的形式 } \frac{f(x)}{g(x)}.$$

【详解】

$$\text{设 } F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ 则 } (F(x))' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} < 0,$$

则 $F(x)$ 在 $a < x < b$ 时单调递减，所以对 $\forall a < x < b$ ， $F(a) > F(x) > F(b)$ ，即

$$\frac{f(a)}{g(a)} > \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f(b)}{g(b)}$$

得 $f(x)g(b) > f(b)g(x)$ ， $a < x < b$ ，(A) 为正确选项。

(4) 【答案】(C)

【分析】本题有多种解法：(1)将含有 $f(x)$ 的要求极限的表达式凑成已知极限的表达式，或

反之：(2)利用极限与无穷小的关系，从已知极限中解出 $f(x)$ 代入要求极限式中；(3)将具体函数用佩亚诺余项泰勒公式展开化简原极限。

【详解】

方法 1：凑成已知极限

$$\frac{6+f(x)}{x^2} = \frac{6x+xf(x)}{x^3} = \frac{6x-\sin 6x+\sin 6x+xf(x)}{x^3}$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x-\sin 6x}{x^3} & \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6-6\cos 6x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6(1-\cos 6x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{1}{2}(6x)^2}{x^2} = 36 \\ & \quad (\text{由于 } 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow 1-\cos(6x) \sim \frac{1}{2}(6x)^2) \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x+\sin 6x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3} = 36+0=36$$

方法 2：由极限与无穷小关系，由已知极限式解出

$$\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3} = a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} a = 0$$

$$\text{从而} \quad \sin 6x+xf(x) = ax^3 \Rightarrow f(x) = \frac{ax^3 - \sin 6x}{x}$$

$$\frac{6+f(x)}{x^2} = \frac{6 + \frac{ax^3 - \sin 6x}{x}}{x^2} = \frac{ax^3 + 6x - \sin 6x}{x^3}$$

$$\text{所以} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^3 + 6x - \sin 6x}{x^3} \stackrel{\text{极限的四则运算}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} a + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x}{x^3}$$

$$= 0 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 - 6\cos 6x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{1}{2}(6x)^2}{x^2} = 36$$

方法 3：将 $\sin 6x$ 在 $x=0$ 处按佩亚诺余项泰勒公式展开至 x^3 项：

$$\sin 6x = 6x - \frac{(6x)^3}{3!} + o(x^3) = 6x - 36x^3 + o(x^3),$$

$$\text{于是} \quad \frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3} = \frac{6x+xf(x)-36x^3+o(x^3)}{x^3} = \frac{6+f(x)}{x^2} - 36 + \frac{o(x^3)}{x^3},$$

$$\text{从而} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3} + 36 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0 + 36 - 0 = 36.$$

(5) 【答案】B

【详解】由特解 $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = 2xe^{-x}$, 对照常系数线性齐次微分方程的特征方程、特征根与解的对应关系知道, $r_2 = -1$ 为特征方程的二重根; 由 $y_3 = 3e^x$ 可知 $r_1 = 1$ 为特征方程的单根, 因此特征方程为

$$(r-1)(r+1)^2 = r^3 + r^2 - r - 1 = 0,$$

由常系数齐次线性微分方程与特征方程的关系, 得该微分方程为

$$y''' - y'' - y' + y = 0.$$

三【详解】

方法 1: 为了求不定积分, 首先需要写出 $f(x)$ 的表达式. 为此, 令 $\ln x = t$, 有 $x = e^t$

$$f(t) = f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+e^t)}{e^t}$$

$$\int f(x)dx = \int e^{-x} \ln(1+e^x)dx = -\int \ln(1+e^x)de^{-x}$$

$$= -e^{-x} \ln(1+e^x) + \int e^{-x} \frac{e^x}{1+e^x} dx \quad \text{分部积分}$$

$$= -e^{-x} \ln(1+e^x) + \int \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} dx \quad \text{拆项}$$

$$= -e^{-x} \ln(1+e^x) + \int (1 - \frac{e^x}{1+e^x}) dx$$

$$= -e^{-x} \ln(1+e^x) + \int 1 dx - \int \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

$$= -e^{-x} \ln(1+e^x) + \int 1 dx - \int \frac{1}{1+e^x} de^x$$

$$= -e^{-x} \ln(1+e^x) + \int 1 dx - \int \frac{1}{1+e^x} d(e^x + 1)$$

$$= -e^{-x} \ln(1+e^x) + x - \ln(1+e^x) + C$$

方法 2: 作积分变量替换, 命 $x = \ln t$,

$$\int f(x)dx = \int f(\ln t) \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt = -\int \ln(1+t) d\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$= -\left[\frac{\ln(1+t)}{t} - \int \frac{1}{t(1+t)} dt\right] \quad \text{分部积分}$$

$$= -\frac{\ln(1+t)}{t} + \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right) dt \quad \text{部分分式求和}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\ln(1+t)}{t} + \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{1+t} d(1+t) = -\frac{\ln(1+t)}{t} + \ln t - \ln(1-t) + C \\
&= -e^{-x} \ln(1+e^x) + x - \ln(1+e^x) + C.
\end{aligned}$$

四【详解】先写出面积 $S(t)$ 的(分段)表达式,

当 $0 < t < 1$ 时, 图形为三角形, 利用三角形的面积公式:

$$S(t) = \frac{1}{2}t^2;$$

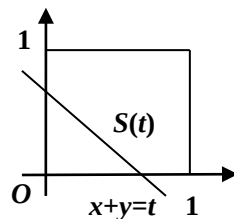
当 $1 < t < 2$ 时, 图形面积可由正方形面积减去小三角形面积, 其中由于 $x+y=t$ 与 $y=1$ 交点的纵坐标为 $t-1$, 于是, 小三角形的边长为: $1-(t-1)=2-t$, 所以

$$S(t) = 1 - \frac{1}{2}(2-t)^2 = 1 - \frac{1}{2}(t^2 - 4t + 4) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t - 1;$$

当 $t > 2$ 时, 图形面积就是正方形的面积: $S(t) = 1$,

则

$$S(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{2}(2-t)^2, & 1 < t \leq 2, \\ 1, & 2 < t. \end{cases}$$



$$\text{当 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时, } \int_0^x S(t) dt = \int_0^x \frac{1}{2}t^2 dt = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{t^3}{3} \right) \bigg|_0^x = \frac{x^3}{6};$$

$$\begin{aligned}
\text{当 } 1 < x \leq 2 \text{ 时, } \int_0^x S(t) dt &= \int_0^1 S(t) dt + \int_1^x S(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{2}t^2 dt + \int_1^x [1 - \frac{1}{2}(t-2)^2] dt \\
&= \frac{1}{6} + (x-1) - \frac{1}{6}(x-2)^3 - \frac{1}{6} = -\frac{x^3}{6} + x^2 - x + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\text{当 } x > 2 \text{ 时, } \int_0^x S(t) dt = \int_0^2 S(t) dt + \int_2^x S(t) dt = 1 + \int_2^x 1 dt = x - 1.$$

$$\text{因此 } \int_0^x S(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{6}x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x + \frac{1}{3} & 1 < x \leq 2 \\ x - 1 & x > 2 \end{cases}$$

五【详解】

方法 1: 按莱布尼茨高阶导数公式:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + \cdots + C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}.$$

为了求 $\ln(1+x)$ 的 n 阶导数, 设 $y = \ln(1+x)$,

$$y' = \frac{1}{1+x};$$

$$y'' = -\frac{1}{(1+x)^2} = -\frac{1}{(1+x)^2};$$

$$y''' = -(-2) \cdot \frac{1}{(1+x)^3} = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3};$$

$$y^{(4)} = -3 \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^4} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4}$$

一般地, 可得

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

即
$$[\ln(1+x)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

设 $u = \ln(1+x)$, $v = x^2$, 利用上述公式对函数展开, 由于对 x^2 求导, 从三阶导数开始就为零, 故展开式中只含有前三项.

$$f^{(n)}(x) = x^2 \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} + 2nx \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} + n(n-1) \frac{(-1)^{n-3}(n-1)!}{(1+x)^{n-2}}.$$

代入 $x=0$, 得:

$$f^{(n)}(0) = n(n-1)(-1)^{n-3}(n-3)! = \frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}, n=3, 4, \dots.$$

方法 2: $y = f(x)$ 带佩亚诺余项的麦克劳林公式:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

求 $f^{(n)}(0) (n \geq 3)$ 可以通过先求 $y = f(x)$ 的的麦克劳林展开式, 则展开式中 x^n 项的

系数与 $n!$ 的乘积就是 $y = f(x)$ 在点 $x=0$ 处的 n 阶导数值 $f^{(n)}(0)$.

由麦克劳林公式,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-2}}{n-2} + o(x^{n-2}),$$

所以 $x^2 \ln(1+x) = x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-2}}{n-2} + o(x^n).$

对照麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n),$$

从而推知

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n-2}$$

得 $f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}, n=3, 4, \cdots.$

六【详解】因为 $|\cos x| \geq 0$, 且 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$,

所以 $\int_0^{n\pi} |\cos x| dx \leq \int_0^x |\cos x| dx < \int_0^{(n+1)\pi} |\cos x| dx.$ 定积分的性质

又因为 $|\cos x|$ 具有周期 π , 所以在长度为 π 的积分区间上的积分值均相等:

$$\int_a^{a+\pi} |\cos x| dx = \int_0^\pi |\cos x| dx,$$

从而

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} |\cos x| dx &= \int_0^\pi |\cos x| dx + \int_\pi^{2\pi} |\cos x| dx + \cdots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\cos x| dx \\ &= n \int_0^\pi |\cos x| dx = n \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos x dx \right) \\ &= n \left(\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi \right) = n(1 - (0 - 1)) = 2n \end{aligned}$$

所以 $\int_0^{(n+1)\pi} |\cos x| dx = 2(n+1).$

所以 $2n \leq \int_0^x |\cos x| dx < 2(n+1),$ 即 $2n \leq S(x) < 2(n+1).$

(2) 由(1)有, 当 $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$ 时, $\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}$

命 $n \rightarrow \infty$ 取极限,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{(n+1)\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(1+\frac{1}{n})\pi} = \frac{2}{\pi}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{n\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(1+\frac{1}{n})}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

由夹逼定理, 得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S(x)}{x} = \frac{2}{\pi}.$$

七【详解】设从 2000 年初(相应 $t=0$)开始, 第 t 年湖泊中污染物 A 的总量为 m , 浓度为 $\frac{m}{V}$,

则在时间间隔 $[t, t+dt]$ 内, 排入湖泊中 A 的量为: $\frac{m_0}{V} \cdot \frac{V}{6}(t+dt-dt) = \frac{m_0}{6} dt$, 流出湖泊

的水中 A 的量为 $\frac{m}{V} \cdot \frac{V}{3} dt = \frac{m}{3} dt$.

因而时间从 t 到 $t+dt$ 相应地湖泊中污染物 A 的改变量为: $dm = (\frac{m_0}{6} - \frac{m}{3})dt$.

由分离变量法求解:

$$\frac{dm}{(\frac{m_0}{6} - \frac{m}{3})} = dt$$

两边求积分:

$$\int \frac{dm}{(\frac{m_0}{6} - \frac{m}{3})} = \int dt \Leftrightarrow -3 \int \frac{d(\frac{m_0}{6} - \frac{m}{3})}{(\frac{m_0}{6} - \frac{m}{3})} = t + C_1 \Leftrightarrow -3 \ln(\frac{m_0}{6} - \frac{m}{3}) = t + C_1$$

$$\Leftrightarrow \ln(\frac{m_0}{6} - \frac{m}{3}) = \frac{t+C_1}{-3} \Leftrightarrow \frac{m_0}{6} - \frac{m}{3} = e^{\frac{t+C_1}{-3}} \Leftrightarrow -\frac{m}{3} = -\frac{m_0}{6} + e^{-\frac{t}{3}} \cdot e^{-\frac{C_1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{m_0}{2} - 3e^{-\frac{C_1}{3}} \cdot e^{-\frac{t}{3}} \Leftrightarrow m = \frac{m_0}{2} - C \cdot e^{-\frac{t}{3}}, \quad (C = 3e^{-\frac{C_1}{3}})$$

初始条件为 $m(0) = 5m_0$, 代入初始条件得 $C = -\frac{9}{2}m_0$. 于是 $m = \frac{m_0}{2}(1+9e^{-\frac{t}{3}})$, 要满

足污染物 A 的含量可降至 m_0 内, 命 $m = m_0$, 得 $t = 6 \ln 3$. 即至多需经过 $6 \ln 3$ 年, 湖泊中

A 的含量降至 m_0 以内.

八【证明】

方法1: 令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt, 0 \leq x \leq \pi$, 有 $F(0) = 0$, 由题设有 $F(\pi) = 0$.

又由题设 $\int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$, 用分部积分, 有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\pi f(x) \cos x dx = \int_0^\pi \cos x dF(x) \\ &= F(x) \cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi F(x) \sin x dx = \int_0^\pi F(x) \sin x dx \end{aligned}$$

由积分中值定理知, 存在 $\xi \in (0, \pi)$ 使

$$0 = \int_0^{\pi} F(x) \sin x dx = F(\xi) \sin \xi \cdot (\pi - 0)$$

因为 $\xi \in (0, \pi)$, $\sin \xi \neq 0$, 所以推知存在 $\xi \in (0, \pi)$, 使得 $F(\xi) = 0$. 再在区间

$[0, \xi]$ 与 $[\xi, \pi]$ 上对 $F(x)$ 用罗尔定理, 推知存在 $\xi_1 \in (0, \xi)$, $\xi_2 \in (\xi, \pi)$ 使

$$F'(\xi_1) = 0, F'(\xi_2) = 0, \text{ 即 } f(\xi_1) = 0, f(\xi_2) = 0$$

方法2: 由 $\int_0^{\pi} f(x) dx = 0$ 及积分中值定理知, 存在 $\xi_1 \in (0, \pi)$, 使 $f(\xi_1) = 0$. 若在区间 $(0, \pi)$

内 $f(x)$ 仅有一个零点 ξ_1 , 则在区间 $(0, \xi_1)$ 与 (ξ_1, π) 内 $f(x)$ 异号. 不妨设在 $(0, \xi_1)$ 内

$f(x) > 0$, 在 (ξ_1, π) 内 $f(x) < 0$. 于是由 $\int_0^{\pi} f(x) dx = 0, \int_0^{\pi} f(x) \cos x dx = 0$, 有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{\pi} f(x) \cos x dx - \int_0^{\pi} f(x) \cos \xi_1 dx = \int_0^{\pi} f(x) (\cos x - \cos \xi_1) dx \\ &= \int_0^{\xi_1} f(x) (\cos x - \cos \xi_1) dx + \int_{\xi_1}^{\pi} f(x) (\cos x - \cos \xi_1) dx \end{aligned}$$

当 $0 < x < \xi_1$ 时, $\cos x > \cos \xi_1$, $f(x)(\cos x - \cos \xi_1) > 0$; 当 $\xi_1 < x < \pi$ 时,

$\cos x < \cos \xi_1$, 仍有 $f(x)(\cos x - \cos \xi_1) > 0$, 得到: $0 > 0$. 矛盾, 此矛盾证明了 $f(x)$

在 $(0, \pi)$ 仅有1个零点的假设不正确, 故在 $(0, \pi)$ 内 $f(x)$ 至少有2个不同的零点.

九【详解】 为了求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程, 首先需要求出 $y = f(x)$ 在 $x = 6$ 处的导数, 即切线斜率. 而函数又是以周期为5的函数, 且在 $x = 1$ 处可导, 则在 $x = 6$ 处可导, 且其导数值等于函数在 $x = 1$ 处的导数值.

将 $f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x) = 8x + \alpha(x)$ 两边令 $x \rightarrow 0$ 取极限, 由 f 的连续性得

$$f(1) - 3f(1) = \lim_{x \rightarrow 0} (8x + \alpha(x)) = 0 \Rightarrow -2f(1) = 0$$

故 $f(1) = 0$, 又由原设 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 两边同除 $\sin x$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \sin x) - f(1)}{\sin x} + 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 - \sin x) - f(1)}{-\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{\sin x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\sin x}$$

根据导数的定义, 得

$$f'(1) + 3f'(1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} = 8 \Rightarrow 4f'(1) = 8$$

所以 $f'(1) = 2$, 又因 $f'(6) = f'(5+1) = f'(1)$, 所以 $f'(6) = 2$, 由点斜式, 切线方程为

$$(y - f(6)) = f'(6)(x - 6).$$

以 $f(6) = f(1) = 0$, $f'(6) = 2$ 代入得 $y = 2(x - 6)$. 即 $2x - y - 12 = 0$.

十【详解】首先联立两式, 求直线与曲线的交点: $1 - x^2 = ax^2$, 得: $x = \pm \frac{1}{\sqrt{1+a}}$, 而 $x \geq 0$,

则交点坐标为: $(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{1+a}}, \frac{a}{1+a})$. 由点斜式, 故直线 OA 的方程为 $y = \frac{ax}{\sqrt{1+a}}$.

由旋转体体积公式 $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$, 要求的体积就是用大体积减去小体积:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}} \pi \left(\frac{ax}{\sqrt{1+a}} \right)^2 dx - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}} \pi (ax^2)^2 dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}} \pi \left(\frac{a^2 x^2}{1+a} - a^2 x^4 \right) dx \\ &= \pi \left(\frac{a^2 x^3}{3(1+a)} - \frac{a^2 x^5}{5} \right) \Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}} = \frac{2\pi a^2}{15(1+a)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

为了求 V 的最大值, 对函数关于 a 求导,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{da} &= \left(\frac{2\pi a^2}{15(1+a)^{\frac{5}{2}}} \right)' = \frac{2\pi}{15} \left(\frac{a^2}{(1+a)^{\frac{5}{2}}} \right)' = \frac{2\pi}{15} \cdot \frac{2a \cdot (1+a)^{\frac{5}{2}} - a^2 \cdot \frac{5}{2} (1+a)^{\frac{3}{2}}}{(1+a)^5} \\ &= \frac{2\pi}{15} \cdot \frac{(1+a)^{\frac{3}{2}} [2a(1+a) - \frac{5}{2} a^2]}{(1+a)^5} = \frac{2\pi}{15} \cdot \frac{[2a(1+a) - \frac{5}{2} a^2]}{(1+a)^{\frac{7}{2}}} \\ &= \frac{2\pi}{15} \cdot \frac{[2a + 2a^2 - \frac{5}{2} a^2]}{(1+a)^{\frac{7}{2}}} = \frac{2\pi}{15} \cdot \frac{[2a - \frac{1}{2} a^2]}{(1+a)^{\frac{7}{2}}} = \frac{\pi}{15} \cdot \frac{[4a - a^2]}{(1+a)^{\frac{7}{2}}} \quad a > 0 \end{aligned}$$

令 $\frac{dV}{da} = 0$, 得唯一驻点 $a = 4$, 所以 $a = 4$ 也是 V 的最大值点, 最大体积为 $V|_{a=4} = \frac{32\sqrt{5}}{1875} \pi$.

十一【详解】(1) 为了求 $f'(x)$, 将 $f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1} \int_0^x f(t) dt = 0$ 两边同乘 $(x+1)$, 得

$$(x+1)f'(x) + (x+1)f(x) - \int_0^x f(t) dt = 0,$$

两边对 x 求导, 得

$$f'(x) + (x+1)f''(x) + f(x) + (x+1)f'(x) - f(x) = 0$$

即 $(x+1)f''(x) + (x+2)f'(x) = 0$.

上述方程为二阶可降阶微分方程, 令 $u = f'(x)$, 化为 $(x+1)u' + (x+2)u = 0$, 即

$$\frac{du}{u} = -\frac{(x+2)}{(x+1)}dx$$

两边求积分:

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{(x+2)}{(x+1)}dx = -\int (1 + \frac{1}{x+1})dx$$

即 $\ln|u| = -(x + \ln(x+1)) + C_1$

所以 $u = \pm e^{(-x - \ln(x+1) + C_1)} = \pm(e^{-x} \cdot \frac{1}{x+1} \cdot e^{C_1})$

令 $C = \pm e^{C_1}$, 则 $u = \frac{Ce^{-x}}{x+1}$, 于是 $f'(x) = u = \frac{Ce^{-x}}{x+1}$.

再以 $x=0$ 代入原方程 $f'(0) + f(0) - \frac{1}{1} \int_0^0 f(t)dt = f'(0) + f(0) = 0$, 由 $f(0)=1$, 有

$f'(0) = -1$, 于是 $C = -1$, $f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x+1}$.

(2)方法 1: 用积分证.

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = 1 - \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1} dt.$$

而 $0 \leq \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1} dt \stackrel{t>0}{\leq} \int_0^x e^{-t} dt \stackrel{\text{牛-莱公式}}{=} -e^{-t} \Big|_0^x = 1 - e^{-x}$

两边同乘以 (-1) , 得:

$$e^{-x} - 1 \leq -\int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1} dt \leq 0,$$

即 $e^{-x} \leq f(x) = 1 - \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1} dt \leq 1$

方法 2: 用微分学方法证.

因 $f(0)=1, f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 单调递减, 所以当 $x \geq 0$ 时 $f(x) \leq 1$.

要证 $f(x) \geq e^{-x}$, 可转化为证明 $f(x) - e^{-x} \geq 0$, 令 $\varphi(x) = f(x) - e^{-x}$, 则

$$\varphi(0)=1-1=0, \text{ 且 } \varphi'(x)=f'(x)+e^{-x} \geq f'(x)+\frac{e^{-x}}{x+1}=0 \quad (x \geq 0)$$

所以, 当 $x \geq 0$ 时 $\varphi(x) \geq 0$, 即 $f(x) \geq e^{-x}$.

结合两个不等式, 推知当 $x \geq 0$ 时, $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$. 证毕.

十二【详解】由题设得

$$A = \alpha\beta^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \beta^T \alpha = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2.$$

$$\text{所以} \quad A^2 = \alpha\beta^T \alpha\beta^T = \alpha(\alpha\beta^T)\beta = 2A, \quad A^4 = 8A; \quad B^2 = 4, \quad B^2 = 16$$

代入原方程 $2B^2A^2x = A^4x + B^4x + \gamma$ 中, 得

$$16Ax = 8Ax + 16x + \gamma, \text{ 即 } 8(A - 2E)x = \gamma$$

其中 E 是三阶单位矩阵, 令 $x = [x_1, x_2, x_3]^T$, 代入上式, 得线性非齐次方程组

$$\begin{cases} -x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

显然方程组得同解方程为

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \quad (2)$$

令自由未知量 $x_1 = k$, 解得 $x_2 = 2k, x_3 = k - \frac{1}{2}$

故方程组通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ 2k \\ k - \frac{1}{2} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (k \text{ 为任意常数})$$

十三【详解】

方法 1: 先求 $\gamma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 将矩阵作初等行变换, 得

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & 10 & 20 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

知 $\gamma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$. 故 $\gamma(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \gamma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$, $[\beta_1, \beta_2, \beta_3]$ 作初等行变换

$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & a-3b & 0 \end{bmatrix}$$

因为 $\gamma(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 2$, 所以 $a = 3b$

又 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 故 $\gamma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3) = \gamma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$

将 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3]$ 作初等行变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & \vdots & b \\ 2 & 0 & 6 & \vdots & 1 \\ -3 & 1 & -7 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & \vdots & b \\ 0 & -6 & -12 & \vdots & 1-2b \\ -1 & 10 & 20 & \vdots & 3b \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & \vdots & b \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & \frac{1-2b}{-6} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 3b + \frac{5}{3}(1-2b) \end{bmatrix}$$

由 $\gamma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3) = 2$, 得 $3b + \frac{5}{3}(1-2b) = 0$, 解得 $b = 5$, 及 $a = 3b = 15$.

方法 2: 由方法 1 中的初等变换结果可以看出 α_1, α_2 线性无关, 且 $\alpha_3 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$, 故

$\gamma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$, α_1, α_2 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的极大线性无关组. 又

$\gamma(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \gamma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关. 从而得

$$|\beta_1, \beta_2, \beta_3| = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

计算三阶行列式得 $-a + 3b = 0$, 得 $a = 3b$

又 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 即可由 α_1, α_2 线性表出, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_3$ 线性相关, 有

$$|\alpha_1, \alpha_2, \beta_3| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & b \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & b \\ 0 & -6 & 1-2b \\ 0 & 10 & 3b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & b \\ 0 & -6 & 1-2b \\ 0 & 0 & 3b + \frac{10}{6}(1-2b) \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{行列式展开得 } -6\left(3b + \frac{10}{6}(1-2b)\right) = 0,$$

$$\text{所以 } 3b + \frac{5}{3}(1-2b) = 0, \text{ 得 } b = 5 \text{ 及 } a = 3b = 15.$$

方法 3: 先利用 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 故方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)X = \beta$ 有解, 即

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

有解. 对其增广矩阵施行初等行变化

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & \vdots & b \\ 2 & 0 & 6 & \vdots & 1 \\ -3 & 1 & -7 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & \vdots & b \\ 0 & -6 & -12 & \vdots & 1-2b \\ -1 & 10 & 20 & \vdots & 3b \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & \vdots & b \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & \frac{2b-1}{-6} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 3b + \frac{5}{3}(1-2b) \end{bmatrix}$$

由其次线性方程组有解的条件(系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩), 知

$$3b + \frac{5}{3}(1-2b) = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}b = 0$$

解得 $b = 5$.

又因为 α_1 和 α_2 线性无关, 且 $\alpha_3 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$, 所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩为 2,

$$\text{由题设条件知 } r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 2, \text{ 从而 } |\beta_1, \beta_2, \beta_3| = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

解得 $a = 15$